Exercice 1 :

Effectuer la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants :

1. $a = 2015$ et $b = 19$
2. $a = -2015$ et $b = 19$
3. $a = 2015$ et $b = -19$
4. $a = -2015$ et $b = -19$

Exercice 2 :

Soit n et a deux entiers naturels non nuls tel que a divise $21n + 3$ et a divise $14n + 9$.

1. Montrer que a divise 21.
2. En déduire les valeurs de a.

Exercice 3 :

Soit le polynôme $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

1. Montrer que si n est un entier tel que $P(n) = 0$ alors n divise 6.
2. Résoudre alors dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 4 :

Soit un entier naturel $n \geq 6$. Soit $a = 3n + 2$ et $b = n - 5$.

1. Calculer $a - 3b$ et en déduire que $a \wedge b = a \wedge 17$
2. Déterminer les valeurs de n pour les quelles $a \wedge b = 17$ et $a \vee b \leq 150$

Exercice 5 :

1. (a) Déterminer l'inverse modulo 19 de 7.
   (b) En déduire les solutions de $7x \equiv 1[19]$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $7x \equiv 2[19]$

Exercice 6 :

Soit n un entier naturel non nul et a et b deux entiers naturels définis par : $a = 5n^2 + 7$ et $b = n^2 + 2$.

1. Montrer que tout diviseur commun de a et b est un diviseur de 3.
2. Montrer que $a \wedge b = 3$ si et seulement si $n^2 \equiv 1[3]$.
3. En déduire, suivant les valeurs de n, le PGCD de a et b.

Exercice 7 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note r_n le reste de la division euclidienne de 2^n par 9

1. (a) Completer le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
r_n							

   Quelle semble être la période de la suite r_n
   (b) En déduire r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 65^n par 9 suivant les valeurs de n.
3. Quel est le reste de la division euclidienne de 65^{2011} par 9

Exercice 8 :

Dans chaque cas utiliser l'identité de Bezout pour démontrer que a et b sont premiers entre eux.

1. $a = n$ et $b = 2n + 1$
2. $a = 7n + 2$ et $b = 11n + 3$.
3. $a = 2n + 3$ et $b = 3n + 5$.

Exercice 9 :

On considére l'équation (E) d'inconnue $(x, y) : 37x + 22y = 1$

1. Montrer que cette équation admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$.
2. Trouver une solution particulliére (x_0, y_0) de (E).
3. Montrer si (x, y) est solution de (E) alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x = 3 + 22k$ et $y = -5 - 37k$.
4. Vérifier que s'il existe un entier k tel que $x = 3 + 22k$ et $y = -5 - 37k$ alors (x, y) est solution de (E).

5. Conclure

Exercice 10 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$

1. $7x - 14y = 1$
2. $37x - 58y = 3$
3. $41x - 27y = 5$
4. $138x - 55y = 5$

Exercice 11 :

Soit un entier naturel $n \geq 2$.

1. Montrer que n et $2n+1$ sont premiers entre eux.
2. On pose $\alpha = n+3$ et $\beta = 2n+1$, on note $d = \alpha \wedge \beta$.
   (a) Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire las valeurs de d.
   (b) Montrer que $d = \alpha$ et β sont multiples de 5 si et seulement si $n-2$ est multiple de 5.
3. Soit $a = n^3 + 2n^2 - 3n$ et $b = 2n^2 - n - 1$.
   Montrer que a et b sont deux entiers naturels divisibles par $n-1$
4. (a) Soit $d' = n(n+3) \wedge (2n+1)$. Montrer que d divise d' puis que $d = d'$.
   (b) En déduire le PGCD de a et b en fonction de n.
   (c) Déterminer le PGCD de a et b pour $n = 2007$.

Exercice 12 : (Principale 2011)

Dans ce qui suit, x et y designent des entiers.
Repondre par vrai ou faux en justifiant la reponse.

1. $x^3 \equiv x[2]$
2. Si $x \equiv 2[14]$ alors $x \equiv 1[7]$.
3. Si $4x \equiv 10y[5]$ alors $x \equiv 0[5]$.
4. Si $\begin{cases} x \equiv 4[5] \\ y \equiv 5[8] \end{cases}$ alors $8x - 5y = 7$.

Exercice 13 : (Contrôle 2012)

1. On considére dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 7x + 18y = 9$
   (a) Montrer que le couple $(9, -3)$ est une solution particuliére de (E)
   (b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le systéme : $\begin{cases} n \equiv 6[7] \\ n \equiv 15[18] \end{cases}$

Exercice 14 : (Contrôle 2013)

1. On considére dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 2x + 5y = 6$
   (a) Vérifier que $(3, 0)$ est de (E)
   (b) Résoudre (E).
2. Soit (x, y) solution de (E)
   (a) Quelles sont les valeurs possibles de $x \wedge y$.
   (b) Déterminer le couple (x, y), solution de (E), tels que $x \wedge y = 3$.

Exercice 15 : (Principale 2014)

1. Soit a un entier tel que $a \equiv 1[10]$.
   (a) Montrer que $a^9 + a^8 + ... + a + 1 \equiv 0[10]$.
   (b) En déduire que $a^{10} \equiv 1[10^2]$.
   (On pourra utiliser l'égalité : $a^{10} - 1 = (a-1)(a^9 + a^8 + ... + a + 1)$)
2. Soit b un entier.
   (a) Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10.
   (b) En déduire que $b^4 \equiv 1[10]$ si et seulement si b est premier avec 10
3. Soit b un entier premier avec 10.
   (a) Montrer que $b^{40} \equiv 1[10^2]$.
   (b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42}.