LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE PROF: SALAH HANNACHI « 4^{EME}MATHS »	2014/2015 **SERIE D'EXERCICES N13** *Les intégrales*

EXERCICE N1 : (*Calcul intégral au moyen d'une primitive*)

Calculer chacune des intégrales suivantes :

$\int_0^1 (x^2 - 3x + \frac{2}{x^2})dx$; $\int_2^3 dt$; $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$; $\int_1^2 \frac{t}{(t^2+1)^2}dt$; $\int_0^1 x(3x^2+2)^4 dx$; $\int_0^1 \sqrt{2x+1}dx$

$\int_0^1 (x+1)\sqrt{x+1}dx$; $\int_1^4 (x+2)\sqrt{x}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,(\sin 2x)^4 dx$; $\int_0^{\pi} (\cos x)^3 dx$; $\int_0^{\pi} (\cos x)^4 dx$

EXERCICE N2 : (*Calcul intégral au moyen d'intégration par parties*)

Calculer chacune des intégrales suivantes :

$\int_0^{\pi} x.\sin^2 x.dx$; $\int_0^{\pi} x^2 \sin 2x.dx$; $\int_0^{\pi} \cos 2x \sin 3x\, dx$; $\int_0^1 (x+1)\sqrt{x+1}dx$

EXERCICE N3 :

Soit la fonction $f : x \longmapsto \sin x - \cos x$

1) A l'aide du tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, dresser le tableau de signe de $f(x)$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Calculer alors l'intégrale $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|dx$

EXERCICE N4 :

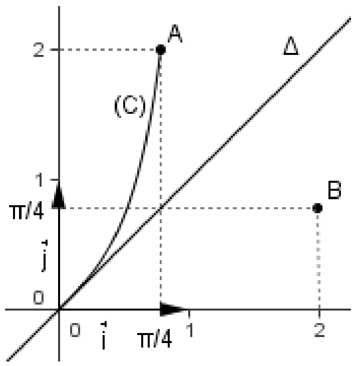
On considère les intégrales $I=\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3}dx$ et $J=\int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}dx$

1) Calculer l'intégrale I

2) Calculer I+J

3) En déduire la valeur de J.

EXERCICE N5 :



La courbe représentative (C) ci-contre est celle de la fonction f définie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par $f(x)=(\tan x)^3 + \tan x$.

La courbe (C) admet au point O une demi-tangente à droite portée par la droite $\Delta : y=x$.

1) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque (notée f^{-1}) dont on précisera le domaine de définition J.

b) Tracer la courbe (C') de la fonction f^{-1}.

c) Calculer $\int_0^2 f^{-1}(x)dx$

3) Calculer (en unité d'aire : u.a) l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C') et le segment [AB].

EXERCICE N6 :

On pose pour tout $n\in IN$, $I_n=\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx$

1) Calculer I_0

2) a) Montrer que pour tout $n\in IN$, on a : $0\le I_n \le \frac{1}{2n+2}$

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

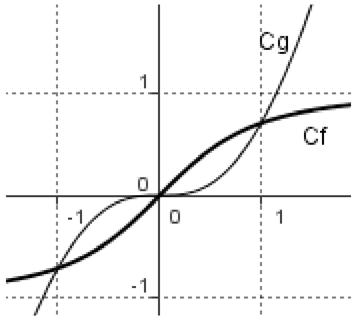
3) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$I_{n+1} = \sqrt{2} -(2n+2).\int_0^1 x^{2n+1}\sqrt{x^2+1}\,dx$

b) En déduire que pour tout $n\in IN$, on a :

$(2n+3).\,I_{n+1}= \sqrt{2} -(2n+2).\,I_n$

c) Calculer alors I_1



4) Soient les fonctions f et g définies sur IR par $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $g(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$ On a représenté ci-contre leurs courbes dans un repère orthonormé d'unité 2cm. Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée.

EXERCICE N7 :

On pose pour tout entier naturel n, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x\,dx$

1) a) Calculer I_0.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

2) a) Montrer que pour tout n, on a : $I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+3}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

EXERCICE N 8 :

On pose $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

1) a) Déterminer le domaine de définition de F.

b) Etudier la dérivabilité de F et en déduire que F est strictement croissante sur IR.

c) Montrer que la fonction $\varphi : x \longmapsto F(x)+F(-x)$ est constante sur IR. En déduire que F est impaire.

2) On pose $g(x)= \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$; $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

a) Montrer que g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et calculer g'(x).

b) Calculer g(0). En déduire que g(x)=x

c) Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$

3) a) Vérifier que F est la réciproque de f (restriction de la fonction tangente sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$).

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

EXERCICE N9 :

Soit F la fonction définie sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ par $F(x)=\int_1^{\tan^2 x} \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$

1) Montrer que F est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et que pour tout $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$, on a : F'(x)=2

2) Calculer $F(\frac{\pi}{4})$. En déduire que pour tout $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$, on a : $F(x)=2x-\frac{\pi}{2}$

3) a) Calculer alors $I=\int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$

b) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $J=\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{(t+1)^2}dt$

EXERCICE N10 :

On pose $g(x)=\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$

1) Montrer que g est définie sur IR^+.

2) Montrer que g est dérivable sur IR^+ et calculer g'(x) pour tout $x\in IR^+$.

3) a) Montrer que $f : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ est décroissante sur IR^+.

b) En déduire que : $\frac{x}{\sqrt{1+8x^3}} \leq g(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$ $\forall\, x \geq 0$.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

EXERCICE N 11 :

On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x^3}$ et on pose pour tout entier $n\geq1$, $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

1) a) Vérifier que f est décroissante et positive.

b) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

2) a) Calculer $\int_1^n f(t)dt$; $n\geq1$ et en déduire que $0\leq \int_1^n f(t)dt \leq \frac{1}{2}$

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_1^n f(t)dt\right)$

3) a) Montrer que pour tout entier $k\geq2$, on a : $\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt$

b) En déduire que pour tout entier $n\geq1$, on a :

$$\int_2^{n+1} f(t)dt \leq S_n - f(1) \leq \int_1^n f(t)dt$$

c) Montrer que pour tout entier $n\geq1$, on a : $1 \leq S_n \leq \frac{3}{2}$

d) En déduire que la somme $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}$ converge et donner un encadrement de sa limite.

EXERCICE N 12 :

Soit n un entier naturel non nul. On pose $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$

1) Vérifier que $I_1=\frac{2}{3}$ et $I_2 = \frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$

2) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

3) a) Au moyen d'une intégration par parties, montrer que : $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$

b) Montrer alors par récurrence, que pour tout $n\in IN^*$ on a :

$$I_n = \frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2n}{2n+1}$$

4) On considère les deux fonctions définies sur IR par :

$F(x)=\int_0^{\sin x}(1-t^2)^n dt$ et $G(x)=\int_0^x (\cos t)^{2n+1}\,dt$

a) Montrer que f et g sont dérivables sur IR et déterminer F'(x) et G'(x).

b) En déduire que pour tout réel x , on a : F(x)=G(x)

c) En déduire que $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{2n+1}\,dt$