

série avant synthèse

SAIDANI MOEZ
4 MATHS 2014/2015

EXERCICE N°1

1. Soit la fonction $x \mapsto \tan x$.

(a) Montrer que la fonction \tan est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} .

(b) On note h la réciproque de \tan , montrer que h est dérivable sur \mathbb{R} et que $h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

2. On considère f la fonction définie par:
$$\begin{cases} f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 1} & x \geq 0 \\ f(x) = \frac{4}{\pi}h(-x + \sqrt{x^2 + 1}) & x < 0 \end{cases}$$

(a) i. Montrer que f est continue en 0

ii. Etudier la dérivabilité de f en 0

i. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^* f'(x) < 0$

ii. Donner le tableau de variation de f et les limites en $+\infty$ et $-\infty$

(b) Construire C_f

(c) Soit $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Montrer que $f(I) = I$

3. On considère la suite (U_n) définie par:
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n); n \geq 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que $\forall x \in I |f'(x)| < \frac{4}{5}$

(b) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \left|U_n - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| < \frac{4}{5} \left|U_{n-1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right|$

(c) Dédurre que la suite U est convergente et calculer sa limite.

(d) Montrer que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[f\left(\frac{1}{\tan x}\right) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

(e) On pose $\forall n \in \mathbb{N} a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$

i. Vérifier que $a_0 = 1; \forall n \in \mathbb{N} a_{n+1} = 2^{n+1} - a_n$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}; U_n = \tan\left(\frac{\pi a_n}{2^{n+2}}\right)$

EXERCICE N°2

Dans la figure ci-dessous; on considère un triangle ABC isocèle rectangle tel que $\left(\widehat{AB}, \widehat{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soit ξ le cercle de diamètre $[AB]$.

Soit R la rotation de centre A qui transforme B en C .

Soit ξ' l'image de ξ par R . On désigne par O le centre de ξ et O' celui de ξ' .

1. (a) Construire ξ' . Soit I le second point d'intersection de ξ et ξ' autre que A .

- (b) Montrer que $I = B * C$ et préciser la nature du quadrilatère $IOAO'$.
2. Soit f une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABC .
- (a) Montrer que $f(A) = A$ et $f(I) = I$
- (b) En déduire toutes les isométries qui laissent globalement invariant ABC .
3. Soient $r_1 = R_{(O, \frac{\pi}{2})}$; $r_2 = R_{(O', \frac{\pi}{2})}$, $g = r_2 \circ r_1$ et $h = r_2^{-1} \circ r_1$
- (a) Préciser $g(B)$ et $h(B)$
- (b) Soit M un point du plan tel que $r_1^{-1}(M) = M_2$ et $r_2^{-1}(M) = M_2$. Montrer à l'aide de h que l'on caractérisera que $\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{BA}$.

EXERCICE N°3

Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $(E_\theta) : z^2 - 2z - 2i \sin \theta e^{i\theta} = 0$

1. (a) Montrer que $1 + 2i \sin \theta e^{i\theta} = (e^{i\theta})^2$
- (b) Résoudre dans \mathbb{C} , (E_θ)
2. On donne $f(z) = z^3 - 4z^2 + 2(2 - 2i \sin \theta e^{i\theta})z + 4i \sin \theta e^{i\theta}$.
- (a) Calculer $f(2)$
- (b) Montrer que $f(z) = (z - 2)(z^2 + bz + c)$ où b et c deux nombres complexes à déterminer.
- (c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$
3. le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . on désigne par $A, B,$ et C les points d'affixes : $2, 1 - e^{i\theta}$ et $1 + e^{i\theta}$
- (a) Donner la forme exponentielle de z_B et z_C .
- (b) Montrer que $OABC$ est un rectangle.
- (c) Déterminer θ pour que $OABC$ soit un carré.

sujet traité par LATEX