SERIE DE REVISION

saidani moêz

bac maths

2014/2015

EXERCICE N°1

1. Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

   (a) Montrer que g une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ soit g^{-1} sa fonction réciproque.

   (b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} x+2-\sqrt{x^2+2x}, x < -2 \\ g(\sqrt{x+2}) \qquad x \geq -2 \end{cases}$ et soit ξ_f sa courbe représentative dans unrepère O.N.D.$(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

   (a) Montrer que f est continue en -2.

   (b) Etudier la dérivabilité de f en -2.

   (c) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et dresser le tableau de variation de f.

   (d) Etudier les branches infinies de ξ_f.

   (e) Montrer que :$(\forall x \in]-\infty, -2])\quad f(x) - 2x - 3 > 0$ puis construire ξ_f

3. Soit h la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty, -2]$

   (a) Montrer que h établit une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

   (b) Expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout x de J.

4. Soit k la restriction de f à l'intervalle $[0, 2]$ et (U_n) la suite définie par: $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = k(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

   (a) Montrer que :$(\forall x \in \mathbb{R}^*)\quad g^{-1}(x) \leq x$.

   (b) Montrer que :$(\forall n \in \mathbb{N})\quad 0 < U_n \leq 2$ et que U_n est décroissante.

   (c) Montrer que l'équation $k(x) = x$ possède une unique solution $\alpha \in]0, 2[$.

   (d) Montrer que $k([0, 2]) \subset [0, 2]$ et déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE N°2

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2

   (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^n = 11$

   (b) Montrer que la somme des racines $n^{ième}$ de 11 est nulle.

2. Soit $u = \exp(\dfrac{2i\pi}{11})$.on pose $S = u + u^4 + u^9 + u^5 + u^3$et $T = u^2 + u^6 + u^7 + u^8 + u^{10}$.

   (a) Justifier l'égalité $u^{11} = 1$ et $\overline{u} = \dfrac{1}{u}$

(b) Déduire sans calculs que S et T sont conjuguées.

(c) Montrer que la partie imaginaire de S est positive (sans calcul numérique).

(d) Démontrer que $S+T=-1$ et $S\times T=3$

(e) En déduire la valeur exact de S et celle de T.

(a) A l'aide des formules d'Euler .montrer que :$i\tan(\dfrac{3\pi}{11})=\dfrac{u^3-1}{u^3+1}=-\sum_{k=1}^{10}(-u^3)^k$.

(b) En déduire que $\tan(\dfrac{3\pi}{11})+4\sin(\dfrac{2\pi}{11})=i(T-S)=\sqrt{11}$