COMPLEXES

SAIDANI MOEZ

BAC MATHS

2014/2015

EXERCICE N°1

On considère l'application f de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{C}^*$ définie par $\forall\theta \in \left]-\pi;\pi\right[\,;\, f(z) = \frac{z}{1+\cos\theta} + \frac{2}{z}$.

1. Calculer $f(1-i)$ et écrire sous sa forme cartésienne.
2. montrer que $\forall\ \theta \in \left]-\pi;\pi\right[\,;\, f(1-i) \notin i\mathbb{R}$.
3. Déterminer θ pour que $f(1-i) \in i\mathbb{R}$.
4. Montrer que: $\left(\overline{f(z)} = f(z)\right) \Leftrightarrow \left[(\overline{z}) = z \text{ ou } \left(|z| = 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right]$.
5. Déduire l'ensemble des points $M(z)$ d'affixes z tel que $E = \{M(z); f(z) \in \mathbb{R}\}$.
6. Montrer que $f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.
7. Déduire l'emsemble des points $M(z)$ d'affixes z ; $F = \{M(z); f(z) \in i\mathbb{R}\}$.

EXERCICE N°2

Pour tout z de $\mathbb{C}^*$on pose $f(z) = \frac{1-i}{2}z + \frac{1+i}{z}$

1. (a) Montrer que $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z\overline{z} - 2)\left(\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)\right) = 0$
   (b) Déduire l'ensemble des points $M(z)$ tel que $f(z) \in \mathbb{R}$
2. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $f(z) \in i\mathbb{R}$
3. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $M(z); M'(f(z))$ et $N(\frac{1-i}{2}z)$ soint alignés
4. On pose $z = e^{i\theta}; \theta \in \mathbb{R}$
   (a) Montrer que $f(z) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \theta) + i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\frac{\pi}{4} - \theta)$
   (b) Déduire que si $M(z)$ est un point de cercle trigonométrique alors $M'(f(z))$ appartient à l'ensemble d'équation : $y^2 + \frac{x^2}{9} - \frac{1}{2} = 0$
5. On considère dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $(E) : z^2 f(z) = (1+i)z + 2i$ et on pose $P(z) = z^3 + 2 - 2i$
   (a) Montrer que $(E) \Leftrightarrow P(z) = 0$
   (b) Vérifier que $1+i$ solution de (E) puis donner les solutions sous forme exponentielle
   (c) Déduire les valeurs exactes de $\sin(\frac{5\pi}{12})$ et $\cos(\frac{5\pi}{12})$

EXERCICE N°3

Soit (z_n) la suite complexe définie par: $\begin{cases} z_0 = e^{i\theta} & ;\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\\ z_{n+1} = z_n + |z_n| & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Ecrire z_1 sous la forme exponentielle

2. On considère la suite (u_n) définie par:$\forall n \in \mathbb{N}; u_n = \arg z_n \, [2\pi] \, ; u_n \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
   Montrer que (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$;puis calculer u_n en fonction de n et θ

3. On considère la suite (v_n) définie par:$\forall n \in \mathbb{N}; v_n = z_n - \overline{z_n}$

   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n ,que déduis-on?

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; |z_n| \sin \frac{\theta}{2^n} = \sin \theta$

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; z_n - z_0 = |z_0| + |z_1| + ... + |z_{n-1}|$

5. Déduire que $\cot an(\frac{\theta}{2^n}) - \cot an\theta = \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2^2}} + ... + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2^n}} \; \forall n \in \mathbb{N}^*$