SAIDANI MOEZ **COMPLEXES** **4 MATHS**

2014-2015

EXERCICE N°1

I- On considère a un nombre complexe différent de 1

Soit l'équation dans $\mathbb{C}$ dont l'inconnu z $(E): 2z^2-2(a-1)z+(a-1)^2=0$

1) Montrer que $z_1=\dfrac{(a-1)(1+i)}{2}$ et $z_2=\dfrac{(a-1)(1-i)}{2}$ sont des solutions de (E)

2) On prend $a=e^{i\theta}$ tel que $0<\theta<\pi$

a) Montrer que $a-1=2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$

b) Déduire la forme exponentielle de z_1 et z_2

II) On munit le plan complexe d'un repère O.N.D $(O;\vec{u};\vec{v})$

On suppose que $\mathrm{Re}(a)<0$ et on considère les points $A(a),B(-i),C(i)$ et $B'(1)$

1) Déterminer les affixes de J et K les milieux de $[AC]$ et $[AB]$ en fonction de a

2) On considère r_1 la rotation de centre J et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre K et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

Soient $A'=r_1(A)$ et $C'=r_1(C)$

Soient c' l'affixe de C' et a' l'affixe de A' .Montrer que $a'=z_1$ et $c'=z_2$

3) Calculer $\dfrac{a'-c'}{a-1}$ et déduire que (AB') la hauteur du triangle $A'B'C'$

EXERCICE N°2

le plan plan complexe est muni d'un R.O.N.D $(O;\vec{u},\vec{v})$

I) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-4\left(1+\dfrac{2}{3}i\right)z+\dfrac{5}{3}+4i=0$

1) a) Vérifier que $z_1=1+\dfrac{2}{3}i$ solution de (E)

b) Montrer que l'autre solution de (E) est $z_2=3z_1$

2) Soit θ l'argument de z_1 .Ecrire en fonctin de θ l'écriture complexe de $\dfrac{5}{3}+4i$

II) On considère les points A,B et Ω distincts deux à deux d'affixe respectives a,b et ω

Soit r la rotation de centre Ω d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et on pose $P=r(A)$ et $B=r(Q)$

Soient p l'affixe de P et q l'affixe Q

1)a) Montrer que $p=\omega+e^{i\frac{\pi}{3}}(a-\omega)$ et $q=\omega+e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-\omega)$

b) Montrer que $\dfrac{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{-i\frac{\pi}{3}}}=e^{i\frac{4\pi}{3}}$

c) Montrer que $\dfrac{p-a}{q-b}=\dfrac{\omega-a}{\omega-b}e^{i\frac{4\pi}{3}}$

2) On suppose que $\dfrac{\omega-a}{\omega-b}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

a) Montrer que $APQB$ *est un parallélogramme*

b) Montrer que $\arg\left(\dfrac{b-a}{p-a}\right)=\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et déduire que $APQB$ est un rectangle

EXERCICE N°3

I) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $iz^2+(2-i)az-(1+i)a^2=0$ ou a un nombre complexe non nul

1) Déterminer z_1 et z_2 les solutions de (E)

2) a) Vérifier que : $z_1z_2=a^2(i-1)$

b) Montrer que z_1z_2 réel $\arg a\equiv\frac{-3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$

II) soit c un nombre réel non nul et z un nombre complexe non nul

Soit les point A,B,C,D et M d'affixes respectifs 1 , $1+i$, c, ic et z

1)a) Montrer que A,D et M sont alignés $\Leftrightarrow (ic+1)z+(ic-1)\overline{z}=2ic$

b) Montrer que $(AD)\perp(OM) \Leftrightarrow (ic+1)z-(ic-1)\overline{z}=0$

2) soit h l'affixe du point H projeté orthogonal de O sur (AD)

a) Montrer que : $h-(1+i)=\frac{i}{c}(h-c)$

b) déduire que : $(CH)\perp(BH)$

EXERCICE N°4

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^2-4iz-2+2i\sqrt{3}=0$

a) Vérifier que $a=1+i(2-\sqrt{3})$ solution de (E)

b) Déduire b l'autre solution de (E)

2) a) Montrer que : $a^2=4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) Ecrire le nombre a sous la forme exponentielle

3) On considère les points A, B et C d'affixe respectifs a, b et $c=2i+2e^{i\frac{\pi}{7}}$

Soit (Γ) le cercle de diamétre $[AB]$

a) Déterminer ω l'affixe du point Ω centre du cercle (Γ)

b) Montrer que O et C appartiennent au cercle (Γ)

c) Montrer que le nombre $\frac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pur

EXERCICE N°5

1) Montrer que $(\forall\theta\in\mathbb{R})$ $1+e^{i\theta}=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1-e^{i\theta}=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

2) Déduire que : $\left(\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right)$ $e^{i\alpha}+e^{i\beta}=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$

3) Déduire les expressions suivantes pour tout n de $\mathbb{N}$ et (α,β) de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos(k\alpha+(n-k)\beta)=2^n\cos^n\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\left(n\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\ \sum_{k=0}^{n}C_n^k\sin(k\alpha+(n-k)\beta)=2^n\cos^n\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\left(n\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\end{cases}$$