# SUITES REELLES

**SAIDANI MOEZ**

BAC MATHS 2014/2015

**EXERCICE N°1**

On considère la suite $(U_n)$ définie par $\begin{cases} U_0 = \alpha \in ]1, +\infty[ \\ U_{n+1} = \frac{\alpha U_n + 1}{U_n} \end{cases}$ et considère les deux suites $(V_n)$ et $(W_n)$ définies par $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$ pour tout $n$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), \alpha \leq U_n \prec \alpha + 1$
   (a) Montrer que $V_{n+1} = \alpha + \frac{V_n}{\alpha V_n + 1}$ et $W_{n+1} = \alpha + \frac{W_n}{\alpha W_n + 1}$
   (b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), V_n \prec W_n$
2. Montrer que la suite $(V_n)$ est strictement croissante et que $(W_n)$ est décroissnte
   (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), W_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{(\alpha^2+1)^2}(W_n - V_n)$
   (b) Déduire que $0 \prec W_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{\alpha}(\frac{1}{(\alpha^2+1)^2})^n$
   (c) Déduire que les deux suites $(V_n)$ et $(W_n)$ sont adjacentes

   (a) Montrer que la suite est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+4}}{2}$
   (b) soit $\beta = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+4}}{2}$ Montrer que :$(\forall n \in \mathbb{N})$, $|U_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^n |\alpha - \beta|$ et déduire $\lim U_n$

**EXERCICE N°2**

Soit $\alpha$ un nombre réel de $]0, +\infty[$ et $N$ un nombre entier naturel tel que $N - 1 \leq \sqrt{\alpha} \leq N$.
et on considère les suites $(U_n)$ et $(V_n)$ définies par $\begin{cases} U_0 = N \\ U_{n+1} = \frac{U^2 + \alpha}{2U_n} \end{cases}$ et $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{V_n + \sqrt{\alpha}}{2} \end{cases}$ pour tout $n$

1. (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_{n+1} - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2U_n}(U_n - \sqrt{\alpha})^2$ et que $(U_n)$ est décroissante.
   (b) Déduire que $\sqrt{\alpha} \leq U_n \leq N$.

   (a) Montrer que $0 \leq U_n - \alpha \leq (\frac{1}{2\sqrt{\alpha}})^{\sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Déduire $0 \leq U_n - \alpha \leq (\frac{1}{2\sqrt{\alpha}})^{2^n - 1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$puis déduire $\lim U_n$.
2. Soit la suite $(W_n)$ définie par $W_n = V_n - \sqrt{\alpha}$.
   (a) Montrer que $(W_n)$ est géométrique .
   (b) déduire $\lim V_n$.