Exercice n°1

Soit $\alpha \in]-\pi;\pi]$; on pose $z = e^{i\alpha}$

Déterminer l'ensemble S des réels $\alpha \in]-\pi;\pi]$ tel que $z^2 + z + 1 = 0$

Soit $\alpha \in]-\pi;\pi]$ tel que $\alpha \notin S$ Ecrire le nombre $z^2 + z + 1$ sous forme trigonométrique

Exercice n°2

Soit $x \in \mathbb{R}$ on pose $P(x) = x^2 + 2(y^2 - 1)x + y^4 - 6y^2 + 1$ avec y paramétre réel

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$avec $z = x + iy$. Montrer que $P(x^2) = 0 \Leftrightarrow \left|z + \frac{1}{z}\right| = 2$
3. Déterminer et construire dans le plan complexe l'ensemble $(E) = \left\{M(z); \left|z + \frac{1}{z}\right| = 2\right\}$

Exercice n°3

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0\ ou\ a \in \mathbb{C}$
2. Dans le plan complexe P rapporté a un repère O.N.D.$(O; \vec{u}; \vec{v})$ et soient les points $A(1 + ia)$ et $B(1 - ia)$
   a. Déterminer l'ensemble (D) des points $M(a)$ tel que O, A, Bsont alignés
   b. Déterminer l'ensemble (C) des points $M(a)$ tel que le triangle OAB soit rectangle en A
3. On suppose que $a = e^{i\theta}, \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
   a. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $1 + e^{i\alpha} = 2\cos(\frac{\alpha}{2})e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $1 - e^{i\alpha} = 2i\sin(\frac{\alpha}{2})e^{i\frac{\alpha}{2}}$
   b. Déduire la forme exponentielle de $z_A\ et z_B$
   c. Déterminer a pour que le triangle OAB soit isocèle et rectangle en A

Exercice n°4

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :$z^2 - 2mz + 1 = 0; m \in \mathbb{R}$

1. Soient $z_1 et\ z_2$solutions de (E)montrer que $|z_1| + |Z_2| = |m - 1| + |m + 1|$
2. On suppose que $m \notin [-1:1]$ montrer que (E) possède une unique solution de module >1
3. On suppose que $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dans le plan complexe on considère les points A, B, M, M_1, M_2 d'affixes respectives $a = 1, b = -1, m, z_1, z_2$
   a. Montrer que $M = M_1 * M_2$ et $OM_1 . OM_2 = OA^2 . OB^2$ et l'axe (Ox) et la bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}}\right)$
   b. Calculer $(z_1 - m)^2 et (z_2 - m)^2$ en fonction de m déduire $MA . MB = {MM_1}^2 . {MM_2}^2$ et que (M_1M_2)est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$

Exercice n°5

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - \frac{\sqrt{3}+1}{2}(1 + i)z + i = 0$

1. a) Montrer que $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}(1 + i)$
   b) Vérifier que $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ solution de (E) déduire l'autre solution z_2
2. Ecrire 1+i sous la forme exponentielle en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) et \sin(\frac{\pi}{12})$

3. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$; $\frac{i-z}{i+z} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \tan(\frac{\theta}{2})$

4. Déduire l'ensemble de solution de l'équation $(\frac{i-z}{i+z})^2 + i(\frac{i+z}{i-z})^2 - \frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i) = 0$

Exercice n°6

1. Soient $d \in \mathbb{C}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): iz^2 + (1-d)(1+i)z + d^2 + 1 = 0$
2. P le plan complexe On considère $M, M_1 et\ M_2$ les points d'affixes respectives $d, z_1 = i + d\ et\ z_2 = -1 - id$ déterminer l'ensemble (Δ) des points Md'affixe d tel que $OM_1 = OM_2$
3. On suppose que $|d| = 1$ montrer que M_1 appartient au cercle (C) que l'on déterminera
4. On suppose que $\arg(d) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ montrer que M_2 appartient a une droite (D) que l'on déterminera

Exercice n°7

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + \alpha z^2 - \bar{\alpha} z - 1 = 0\ \ ou\ \alpha \in \mathbb{C}^*$

1. Montrer que si z_1, z_2, z_3 sont solutions de (E) alors $z_1.z_2.z_3 = 1$
2. Montrer que si z solutions de (E) alors $\frac{1}{\bar{z}}$ solution de (E) déduire que (E) possède au moins une solutions de module égale à 1
3. On suppose que $|\alpha| = 1$ montrer que $-\alpha$ solution de (E) déduire les autres solutions
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^3 + (1 + i\sqrt{3})z^2 + (-1 + i\sqrt{3})z - 2 = 0$

Exercice n°8

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - \left(i\left(m+\overline{m}\right)+1\right)z + \overline{m}(i-m) = 0$ ou $m \in \mathbb{C}^*$

I) 1) a) Vérifier que $\Delta = \left(1 + i\left(m - \overline{m}\right)\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

c) Ecrire les solutions sous la forme exponentielle dans le cas $m = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

2) Montrer que m solutions de (E) équivaut à $\arg(m) \equiv \frac{\pi}{4}(\pi)$

II) on suppose que $\mathrm{Re}(m) \neq \mathrm{Im}(m)$ et on considère les points A, B et C d'affixes respectives m, $i\overline{m}$ et $+im$

1) Montrer que $i\overline{m} \neq m$

2) on donne $z = \frac{(1+im)-m}{i\overline{m}-m}$

a) vérifier que $\overline{z} = \frac{(i-1)\overline{m}-i}{i\overline{m}-m}$

b) Montrer que les points A, B et C sont alignés équivaut à $\mathrm{Im}(m) = \frac{1}{2}$