Exercice n°1 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et – i à tout point M distinct de B, d'affixe z' définie par : $z'=\frac{1-z}{1-iz}$.

1) Déterminer l'ensemble E_1 des points M pour les quels $|z'|=1$.

2) a) Montrer que pour tout $z\neq i$, on a $z'+i=\frac{-1+i}{z+i}$.

 b) En déduire que $BM\times BM'=\sqrt{2}$ et $(\vec{u},\overrightarrow{BM})+(\vec{u},\overrightarrow{BM'})\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

 c) Déterminer l'image du cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

 d) Montrer que si M appartient à la droite D : y = x – 1 alors M' appartient à une droite D' que l'on déterminera.

Exercice n°2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z non nul associé le point M' d'affixe $z'=2z+\frac{1}{z}$.

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
2) Déterminer l'ensemble des points M lorsque M' décrit la droite D : y = 0.
3) Déterminer l'image par f du cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice n°3 :

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et –i et l'application $f:P/\{O\}\to P$; $M(z)\to M'(z')$ tel que $z'=\frac{z+i}{\bar{z}}$.

1) Déterminer l'ensemble des points M tel que f (M) = A.
2) a) Soit $M\in P\backslash\{O,B\}$ et M' = f(M). Montrer que $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})\equiv(\vec{u},\overrightarrow{BM})[2\pi]$.

 b) Déduire que si M appartient à la droite Δ d'équation y = -1 alors les points O,M et M' sont alignés.
3) Montrer que $z'-1=\frac{i(2\operatorname{Im}(z)+1)}{\bar{z}}$ pour $z\in\mathbb{C}^*$.En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont orthogonaux.
4) En déduire une construction du point M' = f(M) connaissant M un point de la droite Δ privée du point B.

Exercice n°4 :

1) Soit θ un réel de l'intervalle $[-\pi,\pi]$ et z le nombre complexe définie par : $z=\frac{\sin(\theta)+i(1-\cos(\theta))}{2}$.

 Déterminer en fonction de θ, le module et un argument de z.
2) Dans cette question , θ est un réel de l'intervalle $]0,\pi[$.Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants : $z-i$ et $\frac{z}{z-i}$ où z étant le nombre complexe donné au 1).

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ on considère les points M et N d'affixes respectives $z-i$ et $\dfrac{z}{z-i}$.Déterminer les ensembles décrits respectivement par les points M et N lorsque θ varie dans l'intervalle $\left]0,\pi\right[$.Représenter ces ensembles.

<u>Exercice n°5 :</u>

On considère la suite de nombres complexes $\left(Z_n\right)$ définie par $Z_0=\sqrt{3}-i$ et pour tout entier naturel n : $Z_{n+1}=\left(1+i\right)Z_n$.

A) Pour tout entier naturel *n*, on pose $U_n=\left|Z_n\right|$.
   1) Calculer U_0.
   2) Démontrer que $\left(U_n\right)$ est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
   3) Pour tout entier naturel *n*, exprimer U_n en fonction de *n*.
   4) Déterminer la limite de la suite $\left(U_n\right)$.

B) 1) Déterminer la forme algébrique de Z_1.
   2) Déterminer la forme exponentielle de Z_0 et de 1+*i*. En déduire la forme exponentielle de Z_1.
   3) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

<u>Exercice n°6 :</u>

Dans le plan complexe rapport au repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ direct, (unité graphique : 5 cm), on considère les points *A* et *B* d'affixes respectives $z_A=1+i$ et $z_B=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$. On désigne par ($C$) le cercle de centre O et de rayon 1.

1) Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.
2) Dans la suite de l'exercice, *M* désigne un point de (C) d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha\in\left[0\,;2\pi\right]$. On considère l'application *f* qui tout point *M* de (C), associe *f(M)* = *MA*× *MB*
3) a) Montrer, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha}-1=2ie^{i\alpha}$.

   b) Montrer l'égalité suivante : $f(M)=\left|e^{i2\alpha}-1-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.

   c) En déduire l'égalité suivante : $f(M)=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\left(-\dfrac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}$.
4) a) En utilisant 2. c., montrer qu'il existe deux points *M* de (*C*), dont on donnera les coordonnées, pour lesquels *f*(*M*) est minimal. Donner cette valeur minimale.

   b) En utilisant 2. c., montrer qu'il existe un seul point *M* de (C), dont on donnera les coordonnées, pour lequel *f* (*M*) est maximal. Donner cette valeur maximale.