Prof :Khammour.Khalil **Année Scolaire :**2013/2014	**Série n°16 :** **Logarithme Népérien**	$4^{\text{ème}}$ Math **Tunis ,Tél :27509639**

Exercice n°1 :

1) Soit la fonction définie sur [-2,2] par $\begin{cases} f(x) = (x+2)\ln(x+2) & \text{si } x \neq -2 \\ f(-2) = 0 \end{cases}$

   Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

   a) Montrer que f est continue à droite en -2.

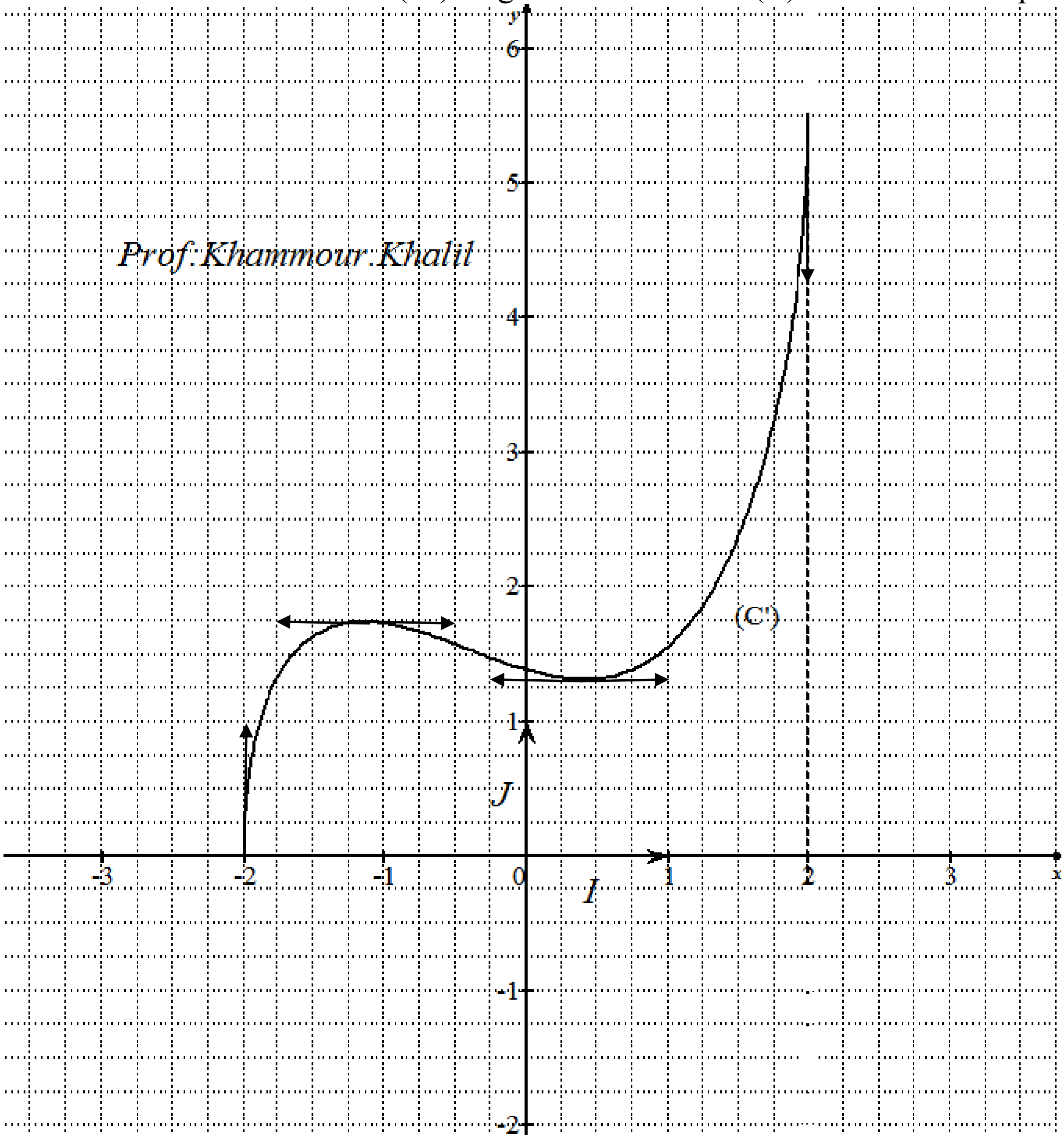
   b) Etudier la dérivabilité de f à droite en -2.

   c) Donner le tableau de variation de f.

2) Soit g la fonction définie sur [-2,2] par $g(x) = f(x) - x\sqrt{4-x^2}$,et (C') sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

   a) Déterminer la position relative des courbes (C) et (C').

   b) On donne ci-contre la courbe (C') de g .Tracer la courbe (C) dans le même repère.



3) Soit α un réel non nul appartenant à [-2,2].On désigne par A_α l'aire de la partie du plan limitée par (C) et (C') et les droites d'équations respectives x =0 et x = α.

   a) Montrer que $A_\alpha = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2}\,dx$ (On distinguera deux cas $\alpha > 0$ *et* $\alpha < 0$) .

   b) Calculer A_α.

   c) Calculer l'aire de la partie limitée par les deux courbes (C) et (C').

Exercice n°2 :

On considère la suite (I_n) définie sur IN* par $I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n dx$.

1) Montrer que (I_n) est une suite décroissante.

2) a) Calculer I_1.

   b) A l'aide d'une intégration par parties ,montrer que : $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$; n∈ IN*.

   c) Calculer I_2.

3) a) Montrer que pour tout n∈ IN* : $\frac{e^3}{n+4} \le I_n \le \frac{e^3}{n+3}$.

   c) Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} n\, I_n$.

Exercice n°3 :

On considère la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln^3(x) - 3\ln(x)$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) Tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Soit g la restriction de f sur $[\frac{1}{e}, e]$.

   a) Montrer que g réalise une bijection de $[\frac{1}{e}, e]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   b) Tracer (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ dans un autre repère.

3) Soit la suite (a_n), pour n∈IN* définie par : $a_n = \int_1^e (\ln t)^n\, dt$.

   a) Calculer a_1.

   b) Montrer que pour tout n≥ 1 , $a_{n+1} = e - (n+1)\,a_n$.

   c) En déduire que $a_3 = 6 - 2e$.

4) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(C_{g^{-1}})$ et les droites $y = e, x = -2$ et x=0.

   a) Calculer $\int_1^e f(t)\,dt$.

   b) En déduire $\mathscr{A}$.

Exercice n°4 :

Soit la fonction définie sur IR par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$.Soit (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f .

   b) Montrer que la droite D :y=1 est un axe de symétrie de la courbe (C).

   c) Préciser la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.

   d) Tracer (C).

2) Soit F la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $F(x) = \int_1^{1+\mathrm{tg}x} \frac{dt}{t^2-2t+2}$.

   a) Montrer que F dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et que F '(x) = 1.

   b) En déduire que F(x) =x et que $\int_1^2 \frac{dt}{t^2-2t+2} = \frac{\pi}{4}$.

3) a) A l'aide d'une intégration par partie ,montrer que $\int_1^2 f(t)dt = 2\ln 2 - 2\int_1^2 \frac{t^2-t}{t^2-t+2}$.

   b) Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{t^2-t}{t^2-2t+2} = 1 + \frac{t-1}{t^2-2t+2} - \frac{1}{t^2-2t+2}$.

   c) Calculer alors l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites x = 1 et x = 2.

Exercice n°5 :

Partie A

Soit n∈ IN^*.Soit g_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ln x$

1) Etudier les variations de g_n.
2) a) En déduire l'existence d'un unique réel $\alpha_n \in]0,+\infty[$ tel que $g_n(\alpha_n) = 0$.

   b) Montrer que $1 \leq \alpha_n \leq e^2$.Vérifier que $\alpha_1 = 1$.

   c) Montrer que $\ln \alpha_n = 2 - \frac{n}{2}\alpha_n$.Exprimer $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et n.

   En déduire que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

   d) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x-\ln x}{2\sqrt{x}}$.On désigne par (C) la courbe représentative de f et par C_0 la courbe de $x \to \sqrt{x}$.

1) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
2) Calculer f '(x) et vérifier que $f'(x) = \frac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$.Dresser le tableau de variation de f.
3) Calculer $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \sqrt{x})$.Que peut-on conclure pour (C).

   Préciser la position relatives de (C) et C_0.Construire C_0 et (C).

Partie C

Soit F la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - \sqrt{x}\ln x$.

1) Montrer que F est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.
2) On considère la suite (I_n) définie sur IN^* par : $I_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} f(1+\frac{k}{n})$.

   a) Soit k∈ IN tel que $0 \leq k \leq n+1$. Montrer que pour tout $x \in [1+\frac{k}{n}, 1+\frac{k+1}{n}]$ on a : $f(1+\frac{k}{n}) \leq f(x) \leq f(1+\frac{k+1}{n})$.

   b) En déduire que $\frac{1}{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq F\left(1+\frac{k+1}{n}\right) - F(1+\frac{k}{n}) \leq \frac{1}{n} f(1+\frac{k+1}{n})$.

c) Montrer que $I_n - \frac{f(2)}{n} \leq F(2) - F(1) \leq I_n - \frac{f(1)}{n}$.

d) En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$

Exercice n°6 :

Soit la fonction définie sur]-1,1[par : $f(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2}\,dt$.

1) a) Justifier l'existence de f .

b) Montrer qu'il existe trois réels α, β, γ tel que $\forall\, t \in$IR-{-1,1}, $\frac{t^2}{1-t^2} = \alpha + \frac{\beta}{1-t} + \frac{\gamma}{1+t}$.

c) En déduire que $\forall\, x \in]-1,1[\,,\ f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x$.

2) Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

3) a) Montrer que $\forall\, x \in IR^*_+$, $\forall\, k \in IN^*$, $\ln x \leq \frac{x}{k} - 1 + \ln k$.

b) En déduire que $\forall\, n \in IN^*$ $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x \leq \ln k$ et par suite $\forall\, n \in IN^*$, $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x \leq \ln n!$.

c) Montrer que $\forall\, n \in IN^*$ $\ln n! \geq \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2}\ln 2$.

4) Soit (I_n) définie sur IN^* par : $I_n = \ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n + n$.

a) Montrer que $\forall\, n \in IN^*$, $I_n \geq \frac{1}{2}\ln 2$.

b) Vérifier que $\forall\, n \in IN^*$, $I_n - I_{n+1} = (2n+1)f\left(\frac{1}{(2n+1)}\right)$.

c) En déduire que (I_n) est convergente.