Prof :Khammour.Khalil **Année Scolaire :**2013/2014	**Série d'exercices :** **Arithmétiques**	$4^{\text{ème}}$ Math **Tunis ,Tél :27509639**

Exercice n°1 :

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

Proposition n°1 : Pour tout entier naturel n non nul : «$5^{6n+1} + 2^{3n+1}$est divisible par 5 ».
Proposition n°2 : Pour tout entier naturel n non nul : « Si un entier naturel n est congru à 1 modulo 7 alors le PGCD de 3n + 4 et de 4n + 3 est égal à 7 ».
Proposition n°3 : « $x^2 + x + 3 \equiv 0[5]$ si et seulement si $x \equiv 1[5]$».
Proposition n°4 : « 5^{750} est un multiple de 7 ».
Proposition n°5 : « Le reste de la division euclidienne de $10^{85} + 1$ par 9 est 5».
Proposition n°6 : « le reste de la division euclidienne par 7 de $3^{2014} - 1$ est 2 ».

Exercice n°2 :

Dans tout l'exercice, *n* désigne un entier naturel non nul.

1) a) Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.

b) Démontrer que, pour tout *n*, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7. En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.

c) À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de3^{1000} par 7.

d) De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^npar 7, pour *n* quelconque ?

e) En déduire que, pour tout entier naturel *n*, 3^n est premier avec 7.

2) Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots 3^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k$ où $n \geq 2$.

a) Montrer que si U_n est divisible par 7, alors 3^{n-1} est divisible par 7.

b) Réciproquement, montrer que si 3^{n-1} est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7.

En déduire les valeurs de *n* telles que U_n soit divisible par 7.

Exercice n°3 :

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^n par 5 ; $n \in$IN.
2) On pose $A_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$; $n \in$IN. Déterminer les restes de la division de A_n par 5.
3) Résoudre dans IN : $A_n \equiv 3(\text{mod}5)$.
4) Déterminer le reste de la division euclidienne par 5 de $N = 1253^{2014} \times 13^{2015}$.
5) Montrer par récurrence que pour tout n de IN* on a : $3^{5n-1} - 2^{3n+1} \equiv 0(\text{mod}5)$.

Exercice n°4 :

1) Montrer que pour tout n ∈ IN : $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0(\text{mod}7)$.
2) Résoudre dans Z l'équation : $x^2 - x + 4 \equiv 0(\text{mod}6)$.
3) a) Montrer que pour tout $x \in \{2,3,4,5,6\}$: $x^6 \equiv 0(\text{mod}7)$.

b) Soit $A_n = 4^n + 5^n + 6^n + 9^n + 10^n$ (n ∈ IN)

Montrer que si $n \equiv 1(\text{mod}6)$ alors $A_n \equiv 6(\text{mod}7)$.

c) Déduire le reste de A_{2011} modulo 7.

Exercice n°5 :

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier 4n−1, lorsque n est un entier naturel.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 (\text{mod } p)$.

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.
2) Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
3) Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
4) Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?
5) À l'aide des questions précédentes. Déterminer quatre diviseurs premiers de 4^{28}-1.

Exercice n°6 :

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
   En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.
2) Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.
3) Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier : $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$
   a) Si p = 3n, quel est le reste de la division de A_p, par 7 ?
   b) Démontrer que si p = 3n + 1 alors A_p est divisible par 7.
   c) Étudier le cas où p = 3n + 2.

Exercice n°7 :

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :
« Étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si PGCD(a ; b) = 1 alors PGCD(a^2,b^2)=1».
Une suite (S_n) est définie par pour tout n>1 $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$
On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, $\text{PGCD}(S_n, S_{n+1})$.

1) Démontrer que, pour tout n > 0, on a : $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
2. Étude du cas où n est pair. Soit p l'entier naturel non nul tel que n = 2p.
   a) Démontrer que $\text{PGCD}(S_{2p}, S_{2p+1}) = (2p+1)^2 \text{PGCD}(p^2, (p+1)^2)$.
   b) Calculer $\text{PGCD}(p, p+1)$.
   c) Calculer $\text{PGCD}(S_{2p}, S_{2p+1})$.
3) Étude du cas où n est impair. Soit p l'entier naturel non nul tel que n = 2p +1.
   a) Démontrer que les entiers 2p +1 et 2p +3 sont premiers entre eux.
   b) Calculer $\text{PGCD}(S_{2p+1}, S_{2p+2})$.
4) Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

Mr:Khammour.Khalil Tél:27509639