❖ Exercice n°1 :

On donne , dans la feuille ANNEXE , ci jointe , (C) la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la fonction réciproque f^{-1} d'une fonction f continue et strictement monotone sur $]0,+\infty[$. La courbe (C) admet les droites d'équations $y = x$ et $y = 0$ comme asymptotes et coupe l'axe des ordonnées en A(0 , ln2).

1) a – Par lecture graphique déterminer :

$$f^{-1}(0) \ ; \ \lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x) \ ; \ \lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) \text{ et } \lim_{y\to+\infty}[y - f(y)]$$

b – En déduire :

$$\lim_{x\to0^+} f(x) \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

c – Tracer la courbe (C') de *f* ,dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ que (C), sur la feuille ANNEXE

2) En réalité on connait que : $f^{-1}(x) = \ln(e^{ax} + b)$, où a et b sont deux réels strictement positifs.

a – Vérifier que $f^{-1}(x) = ax + \ln(1 + be^{-ax})$, pour tout réel x strictement positif .

b – Montrer que : $a = b = 1$.

c – En déduire que pour tout réel x strictement positif , $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

3) On considère la suite (I_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , I_n = \int_1^n e^{-x}\ln(e^x - 1)\,dx$$

a – Montrer que la suite (I_n) est croissante .

b – A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int_1^n xe^{-x}\,dx$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;

$$0 \le I_n \le -(n+1)e^{-n} + \frac{2}{e}$$

c - Montrer que la suite (I_n) est convergente .

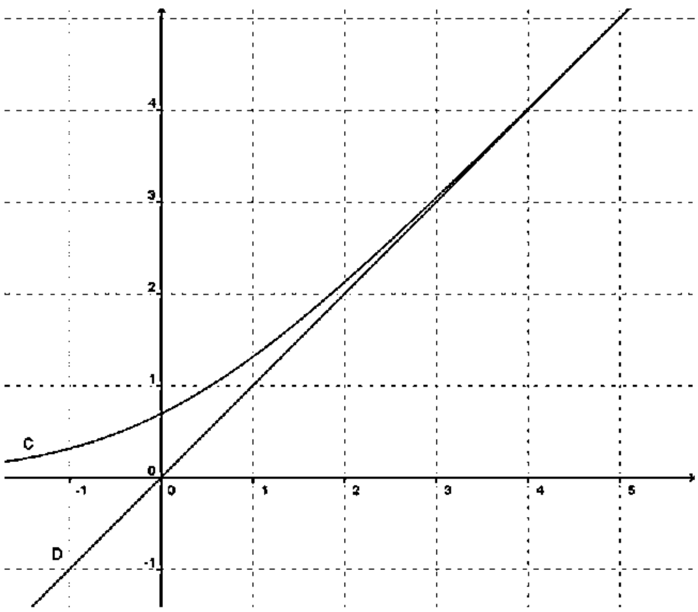
4) a – Vérifier que :

$$\forall x \neq 0 ; \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x}{e^x - 1} - 1$$

b – Montrer en s'aidant d'une intégration par partie que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , I_n = \left(1 - \frac{1}{e^n}\right)\ln(e^n - 1) - n + \left(\frac{1}{e} - 1\right)\ln(e - 1) + 1$$

c – En déduire la limite de I_n , lorsque n tend vers $+\infty$.



❖ Exercice n°2 :

A/ Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{2e^x - 1}}$.

1) a) Déterminer D_g : le domaine de définition de g.

b) Montrer que g est dérivable sur D_g et que pour tout $x \in D_g$ on a : $g'(x) = \dfrac{e^x}{\left(\sqrt{2e^x - 1}\right)^3}$.

c) Dresser le tableau de variation de g

2) Tracer la courbe de g dans un repère orthonormé.

3) Soit f la fonction définie sur $]-\pi/2\,,\,\pi/2[$ par $f(x) = -\ln(1 + \sin x)$.

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f réalise une bijection de $]-\pi/2\,,\,\pi/2[$ sur $]-\ln 2\,,\,+\infty[$.

c) Soit y un réel de $]-\pi/2\,,\,\pi/2[$. On pose $x = f(y)$, montrer que $\sin y = e^{-x} - 1$.

4) a) Soit $G(x) = f^{-1}(x)$. Montrer que G est une primitive de g sur $]-\ln 2\,,\,+\infty[$.

b) Calculer alors $\displaystyle\int_0^{\ln 2} g(t)\,dt$.

B/ Pour tout entier naturel non nul n et pour tout x de $[0\,,\,+\infty[$ on pose $G_n(x) = \displaystyle\int_0^x (g(t))^n\,dt$.

1) a) Justifier que pour tout $x \in [0\,,\,+\infty[$ on a : $G_1(x) = G(x)$.

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G_1(x) = -\frac{\pi}{2}$.

2) Montrer que pour tout $t \in]-\ln 2\,,\,+\infty[$, on a : $g^2(t) = \dfrac{e^{-t}}{2 - e^{-t}}$. En déduire $G_2(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G_2(x)$.

3) a) Montrer que pour tout $t \in [0\,,\,+\infty[$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|g(t)|^n \leq e^{-\frac{nt}{2}}$.

b) Montrer alors que pour tout $t \in [0\,,\,+\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $G_n(x) \leq \dfrac{2}{n}$.

❖ Exercice n°3 :

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$.

Soit $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Étude préliminaire : mise en place d'une inégalité.

On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $g(x) = \ln(1+x) - x$.

1. Étudier le sens de variation de g.
2. En déduire que pour tout réel a positif ou nul $\ln(1+a) \leqslant a$.

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$.

1. Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1.
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $f_1(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{e^x}\right)$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f_1.

Partie B : Étude et propriétés des fonctions f_k.

1. Calculer $f_k(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k.
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, $f_k(x) = \ln\left(1+k\dfrac{x}{e^x}\right)$. En déduire la limite de f_k, en $+\infty$.
3. a. Dresser le tableau de variation de f_k.

   b. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, on a $f_k(x) \leqslant \dfrac{k}{e}$.
4. Déterminer une équation de la tangente T_k à $\mathscr{C}_k$ au point O.
5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_p$ et $\mathscr{C}_m$.
6. Tracer les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en O.

Partie C : Majoration d'une intégrale.
Soit λ un réel strictement positif, on note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_k$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=\lambda$.

1. Sans calculer $\mathscr{A}(\lambda)$, montrer que $\mathscr{A}(\lambda) \leqslant k\displaystyle\int_0^{\lambda} xe^{-x}\,dx$ (on pourra utiliser le résultat de la question préliminaire).
2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\lambda} xe^{-x}\,dx$.
3. On admet que $\mathscr{A}(\lambda)$ admet une limite en $+\infty$.
   Montrer que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathscr{A}(\lambda) \leqslant k$.
   Interpréter graphiquement ce résultat

❖ Exercice n°4 :

Soit $F(x) = \displaystyle\int_1^{1+\ln^2 x} e^{\sqrt{t-1}}\,dt \quad \forall x \in \left]0,+\infty\right[$

1.a) Justifier l'existence de F sur $\left]0,+\infty\right[$.

b) Montrer que F est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et que : $\forall x \in \left]0,+\infty\right[, F'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}e^{|\ln x|}$.

2.a) Calculer F(1) et vérifier que pour $x \geq 1, F(x) = 2\displaystyle\int_1^x \ln t\,dt$. en déduire F(x) pour $x \in \left]1,+\infty\right[$

b) Montrer que $\forall x \in \left]0,+\infty\right[$, $F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)$. En déduire l'expression de F(x) sur]0 ;1].

3.Calculer chacune des deux intégrales suivantes : $A = \displaystyle\int_1^2 e^{\sqrt{t-1}}\,dt$ puis $B = \displaystyle\int_2^5 e^{\sqrt{t-1}}\,dt$