

➤ Exercice 1:

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique : 2cm).
On considère les points A ; B et C d'affixes respectives $z_A = 1 - i$; $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$ et $z_C = 2$.
Soit ξ le cercle de centre C et de rayon 2.

- 1) a) Vérifier que $B \in \xi$.
b) Placer les points A et C. Construire alors le point B.
- 2) a) Ecrire z_A sous forme exponentielle.
b) Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique.
c) Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3}) e^{i\frac{\pi}{3}}$.
d) En déduire la forme exponentielle de z_B .
e) Déterminer alors la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
- 3) Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan tel que : $|z| = |\bar{z} - 1 - i|$.
- 4) Pour tout point M du plan d'affixe $z \neq 2$ on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -3i\left(\frac{z-1+i}{z-2}\right)$.
a) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que z' soit réel .
b) Montrer que $OM' = 3 \frac{AM}{CM}$.
c) En déduire que lorsque M décrit la médiatrice de [AC] ; le point M' décrit un cercle que l'on déterminera.

➤ Exercice 2:

Soit la suite définie sur IN par :
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n - 2}{U_n + 1} \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n \geq 2$.
b) Montrer que U est décroissante.
c) Déduire que U est convergente et calculer sa limite.
- 2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3} (U_n - 2)$.
b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$
c) Retrouver la limite de U.

➤ **Exercice 3:**

Dans la graphie ci-dessous on a représenté la courbe (C) d'une fonction f définie sur $[-2, 2]$ et la droite D d'équation : $y = x$

On considère la suite U définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour $n \geq 0$

1/ En utilisant le graphique :

- a) Quel est le sens de variation de f ?
- b) Déterminer le signe de $[f(x)-x]$ sur $[-2,2]$

2/a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq U_n \leq 1$

- c) Vérifier que la suite U est croissante
- d) En déduire que U est convergente et calculer sa limite.

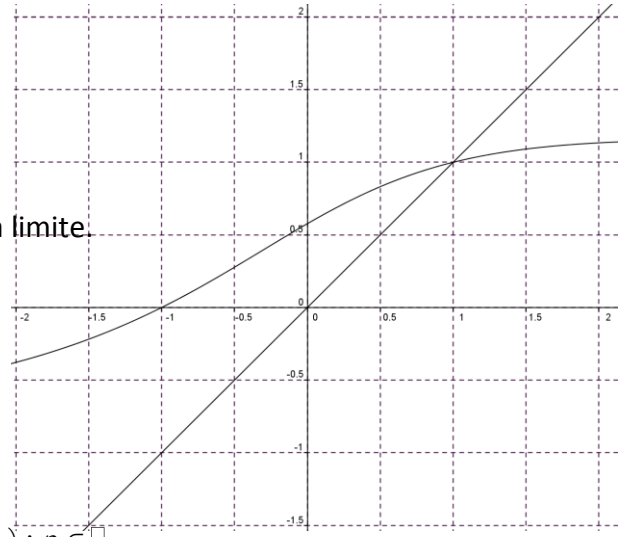
3/ On considère la suite $(t_n)_{n>0}$ définie par $t_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n U_k$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$

4/ La fonction f est définie par $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x^2+3}}$

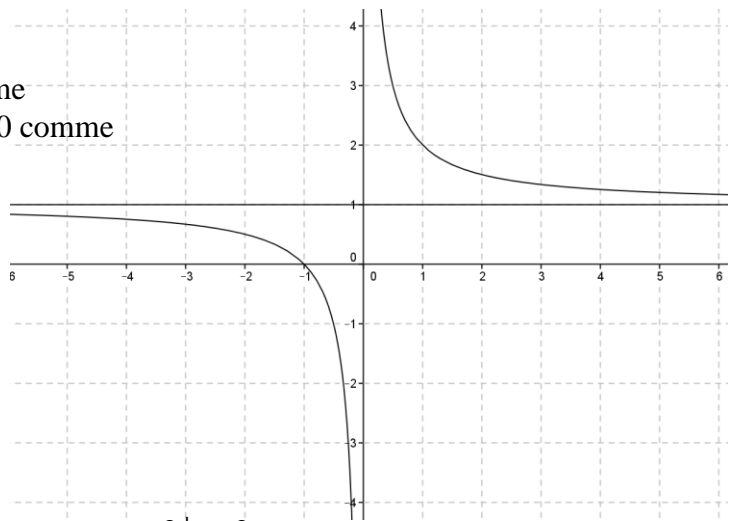
On désigne par V la suite définie par $V_n = \sum_{k=0}^n (2U_{k+1} - U_k)$; $n \in \mathbb{N}$

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} ; U_{n+1} \geq \frac{1+U_n}{2}$. En déduire que $V_n \geq n+1$
- b) Déterminer, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$



➤ **Exercice 4:**

La courbe ci-dessus est celle d'une fonction f définie sur \mathbb{R}^* , elle admet la droite $D: y=1$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ et $D': x=0$ comme asymptote verticale.



1./a. Déterminer graphiquement les limites de f en $+\infty, -\infty, 0^+$ et 0^- .

b. Calculer ces limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(\frac{x}{x^2+1})$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(\frac{x}{\sqrt{x}-2})$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x)-1}{f(x)-1}$

2./ Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 1 \\ x^3 + 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

- a. Montrer que g est continue 1.
- b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]-\infty, 1]$ une unique solution α puis vérifier que $0 < \alpha < 1$.

3./ Déterminer l'image de $]-\infty, 0[$ par la fonction composée $g \circ f$.