Lycée Jammel 3	**Série 4**	Mr :Afli Ahmed
$4^{ème}$M	**Suites réelles**	11/10/2014

Exercice 1:

Soit la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n - 2}{U_n + 1} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout n ∈ IN : $U_n \geq 2$.
   b) Montrer que U est décroissante.
   c) Déduire que U est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout n ∈ IN : $U_{n+1} - 2 \leq \dfrac{2}{3}(U_n - 2)$.

   b) Montrer par récurrence que pour tout n ∈ IN: $U_n - 2 \leq (\dfrac{2}{3})^n$

   c) Retrouver la limite de U.

Exercice 2:

On considère la suite u définie sur IN par: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{4 - u_n^2}} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in$ IN on a: $0 < U_n < \sqrt{2}$
2) Etudier la monotonie de' cette suite
3) En déduire que la suite U est convergente et donner sa limite
4) Soit V la suite définie sur IN par : $v_n = \dfrac{u_n^2}{2 - u_n^2}$
   a. Montrer que v est arithmétique
   b. Exprimer Un en fonction de n puis retrouver le résultat 3)
   c. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n + \sqrt{vk}}$. Montrer que $\forall n \in IN^*; \dfrac{n}{n + \sqrt{n+1}} \leq s_n \leq \dfrac{n}{n + \sqrt{2}}$
   d. En déduire que S_n est convergente et donner sa limite

Exercice 3:

On considère la suite réelle (U_n) définie sur IN* par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \dfrac{1}{2^n}} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in$ IN* on a: $U_n \geq 1$.
   b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

2) a) Montrer que pour tout $n \in$ IN* on a: $U_{n+1} - U_n \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

   b) En déduire que pour tout $n \in$ IN* on a: $U_n \leq \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2^n}$.

   c) Que peut-on dire de la convergence de la suite (U_n)? Expliquer.

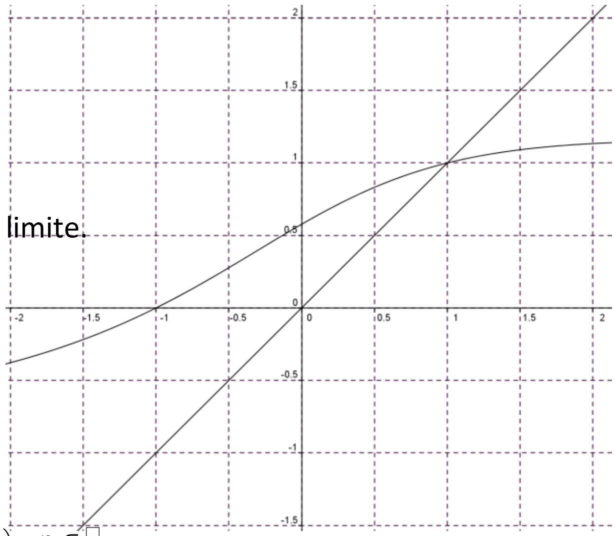
3) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in$ IN* on a: $U_n^2 = 2\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

   b) Calculer alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 4:

Dans la graphe ci-dessous on a représenté la courbe (C)d'une fonction f définie sur [-2 , 2] et la droite D d'équation : y= x

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour $n \geq 0$



1/ En utilisant le graphique :

a) Quel est le sens de variation de f ?

b) Déterminer le signe de [f(x)-x] sur [-2,2]

2/a) Montrer par récurrence que : $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ;\ 0 \leq U_n \leq 1$

c) Vérifier que la suite U est croissante

d) En déduire que U est convergente et calculer sa limite.

3/ On considère la suite $(t_n)_{n>0}$ définie par $t_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} U_k$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$

4/ La fonction f est définie par $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x^2+3}}$

On désigne par V la suite définie par $V_n = \sum_{k=0}^{n}(2U_{k+1} - U_k)\ ;\ n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\ ;\ U_{n+1} \geq \frac{1+U_n}{2}$. En déduire que $V_n \geq n+1$

b) Déterminer, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

Exercice 5:

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = 3$, $b_0 = 1$ et pour tout entier naturel n on a :

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n + 3}{3} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n + 3}{3}. \qquad \text{On pose } u_n = a_n - b_n$$

1./a. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 2(\frac{1}{3})^n$

b. En déduire la limite de (u_n)

2./ On pose , pour $n \in \mathrm{N}^*$, $v_n = \frac{a_n + b_n}{n}$

a.Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $v_n \geq 2$

b. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $v_{n+1} = v_n + \frac{2 - v_n}{n+1}$.

c. En déduire que (v_n) converge vers un réel $l \succ 0$

3./Exprimer alors a_n et b_n en fonction de u_n , v_n et n puis déterminer les limites des suites (a_n) et (b_n).

Exercice 6:

Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_0 = -\frac{3}{2}$ et et pour tout n ∈ IN : $U_{n+1} = \frac{{U_n}^2}{1+2U_n}$

1./ a. Montrer que pour tout n ∈ IN ; $U_n < -1$

b. Montrer que (U_n) est monotone.

c. En déduire que (U_n) est convergente et préciser sa limite.

2./ a. Montrer que pour tout n ∈ IN ; $|U_{n+1} + 1| \leq \frac{1}{3}\ |U_n + 1|$

b. En déduire que pour tout n ∈ IN; $|U_{n+1} + 1| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ .Retrouver la limite de U.

3./ Montrer que pour tout n ∈ IN , $U_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)} - 1}$