Lycée Jammel 3	Série 3	Mr :Afli Ahmed
$4^{ème}$M	Continuité et limites	30/09/2014

Exercice 1:

On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{1-x^3} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 + \dfrac{x^2-1}{x+2} & si\ \ x > 1 \end{cases}$

1./Montrer que l'ensemble de définition de f est IR.

2. /Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.Interpréter graphiquement ce résultat.

3./Vérifier que f est continue en 1 puis sur IR .

4./Montrer que l'équation f (x) = $\dfrac{1}{2}$ admet dans $]-1;0[$ une solution α . Vérifier que $\alpha^2+\alpha-1=\dfrac{3}{4\alpha}$.

5./a. Vérifier que pour tout x < 1 on a : $\dfrac{f(x)-1}{x-1} = 1 - \dfrac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^3}}$.

b. Calculer alors $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{f(x)-1}{x-1}$

Exercice 2:

I. 1./Montrer que l'équation sinx = x - 1 admet dans $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ une solution unique a.

2./ Lequel des deux intervalles $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ ou $\left[\dfrac{3\pi}{4};\pi\right]$ contient-il a ?

II. Soit la fonction f définie sur IR par $\begin{cases} f(x) = \sin x - x + 1 & si\ \ x > 0 \\ f(x) = \ 1 + \sqrt{1-x} & si\ \ x \leq 0 \end{cases}$

(C) désigne la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1./ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .En déduire $\lim\limits_{x\to1^+} f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$.

a.Montrer que pour tout x > 0 on a : $-1 \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{2}{x} - 1$.En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b.Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ .Interpréter graphiquement ces résultats.

c.Etudier la continuité de f en 0. Déterminer les intervalles de IR sur lesquels f est continue.

3./Soit la fonction g définie sur $]0;\pi[$ par g(x) = $\dfrac{f(x)-1}{\sin x}$.

Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. g est-elle prolongeable en π ?

Exercice 3:

La figure ci-dessous représente la courbe (C) d'une fonction f dans un repère orthonormé.

- Les droites y = x et y = 3 sont des asymptotes à (C) au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$ respectivement.
- Le point $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ appartient à la courbe (C).

1./Dans cette question,utiliser le graphique pour répondre.

a. Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-x]$.

b.Dresser le tableau de variation de f.

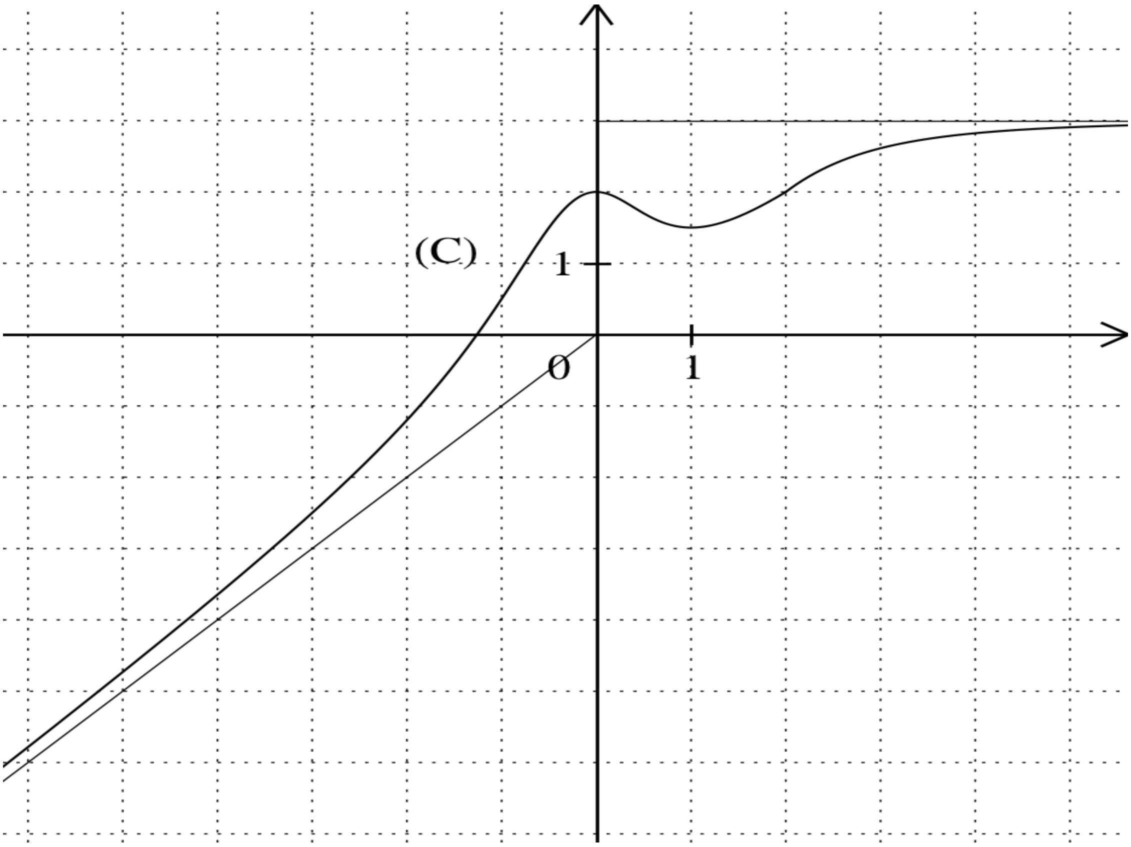
voir verso ⇒

c.Déterminer $f(]-\infty,0])$, $f([0,2])$ et $f(\mathbb{R})$.

d.Résoudre dans R chacune des équations : f(x) = 2 et f(x) = x.

2./On donne pour tout réel x , $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+2}{x^2+1} & si\ \ x \le 2 \\ \dfrac{3x^3}{4+x^3} & si\ \ x > 2 \end{cases}$

Montrer par le calcul que la droite $y=x$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$ et que la droite $y=3$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.



Exercice 4:

On considère la fonction f définie sur IR par f (x) = $\begin{cases} x^3+x+1 & si\ \ x \le 0 \\ \sqrt{1+4x^2}-x & si\ \ x > 0 \end{cases}$.

(C) désigne la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. /Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.Interpréter ces résultats graphiquement.

2. /Montrer que (C) admet en + ∞ une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation.

3. /Etudier la continuité de f en 0 puis sur IR .

4. /a. Montrer que l'équation f (x) = 0 admet dans $]-1,0[$ une solution unique α .

b.Montrer que $-\dfrac{1}{\alpha} = 1+\alpha^2$.

c.Vérifier que pour tout réel x de $]-\infty\ ,\ 0]$ on a : f (x) $=(x-\alpha)\left(x^2+\alpha x-\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

d.En déduire que la fonction g: x$\mapsto \dfrac{1+x+x^3}{x-\alpha}$ est prolongeable par continuité en α .