Exercice n°1 :(QCM)

Pour chacune des trois questions. Une seule des quatre propositions est exacte.

1) On désigne par A et B deux évènements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité *p*. On sait que $p(A \cup B) = \frac{4}{5}$ et $p(\overline{A}) = \frac{3}{5}$. La probabilité de l'évènement B est égale à :

   a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{1}{2}$

2) On note *X* une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,04$ .La valeur approchée de P($X > 5$) à 10^{-2} près est égale à :

   a) 0,91 b) 0,18 c) 0,19 d) 0,82

3) Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre. S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{9}{10}$. Je sors mon chien ; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :

   a) $\frac{9}{10}$ b) $\frac{27}{40}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{27}{28}$

3) La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre 0,2. La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est :

   a) $1 - \frac{1}{e}$ b) $\frac{1}{e}$ c) $\frac{1}{5e}$ d) $\frac{1}{0,2}(e-1)$

Exercice n°2 :

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1) On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne.

On note A_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire » ;

A_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire » ;

A_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires ».

Montrer que $p(A_0) = \frac{6}{15}$ et $p(A_1) = \frac{8}{15}$; en déduire $p(A_2)$.

2) Après ce premier tirage, il reste 4 boules dans l'urne. On effectue à nouveau un tirage sans remise de deux boules de l'urne.

On note B_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n°2 » ;

B_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire au tirage n°2 » ;

B_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires au tirage n°2 ».

a) Calculer $P_{A_0}(B_0)$, $P_{A_1}(B_0)$ et $P_{A_2}(B_0)$.
b) Calculer $P(B_0)$.
c) Calculer $P(B_1)$ et $P(B_2)$.
d) On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier tirage ?

3) On considère l'événement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient tirées de l'urne ». Montrer que $p(R)=\frac{1}{3}$.

Exercice n°3 :

Les questions 1. et 2. sont indépendantes. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Une urne U_1 contient 4 jetons blancs et 3 noirs et une urne U_2 contient 17 jetons blancs et 18 noirs.

1) On jette un dé cubique dont chaque face a la même probabilité d'apparaître. Si le 6 apparaît, on tire un jeton de l'urne U_1 sinon on tire un jeton de l'urne U_2 .
   a) Déterminer la probabilité de tirer un jeton blanc (on considérera les événements A : "On a obtenu 6 en jetant le dé" et B : "On obtient un jeton blanc".)
   b) On a tiré un jeton blanc ; calculer la probabilité pour qu'il provienne de U_1.
   c) On a tiré un jeton noir ; calculer la probabilité pour qu'il provienne de U_2.
2) On tire successivement et sans remise les 7 jetons de l'urne U_1.

X est la variable aléatoire qui prend pour valeur k si le premier jeton blanc apparaît au k ème tirage.

Donner la loi de probabilité de X, puis calculer son espérance mathématique et son écart-type.

Exercice n°4 :

Le bus passe toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7 heures et 7 heures 30. La variable aléatoire sera l'heure exacte de son arrivée à cet arrêt, uniformément répartie sur l'intervalle [0 ; 30].

1) Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de 5 minutes le prochain bus ?
2) Quelle est la probabilité qu'il attende plus de dix minutes ?

Exercice n°5 :

On suppose que la durée d'une conversation téléphonique, mesurée en minutes, est la variable exponentielle de paramètre $\frac{1}{10}$. Vous arrivez à une cabine téléphonique et juste à ce moment précis, une personne passe devant vous.

1) Quelle est la probabilité que vous attendiez plus de dix minutes ?
2) Quelle est la probabilité que vous attendiez entre dix et vingt minutes ?

Exercice n°6 :

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par *a* et *b*. 2 % des montres fabriquées présentent le défaut *a* et 10 % le défaut *b*.

Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les évènements suivants :

A : « la montre tirée présente le défaut *a* » ;

B : « la montre tirée présente le défaut *b* » ;

C : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;

D : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».

On suppose que les évènements A et B sont indépendants.

1) Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,882.
2) Calculer la probabilité de l'évènement D.
3) Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres. On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts a et b. On définit l'évènement E : « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ».
   Calculer la probabilité de l'évènement E. On en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice n°7 :

Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B. Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B. Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le film A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente. Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe. On considère les évènements suivants :

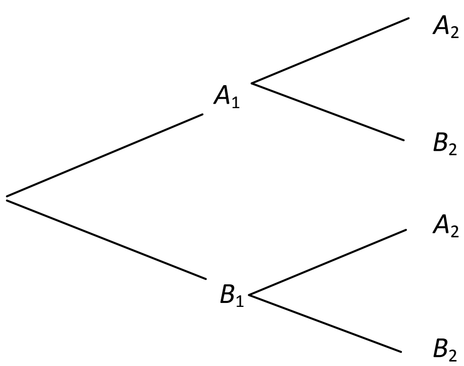
A_1 « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;

A_2 « la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi » ;

B_1 « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;

B_2 « la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ».

1) a) Calculer les probabilités suivantes : $p(A_1)$ et $p(A_2)$.
2) b) Calculer les probabilités de chacun des évènements suivants : $p_{A_1}(A_2)$, $p_{B_1}(A_2)$ et $p(A_1 \cap A_2)$.
3) c) Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



d) Retrouver à partir de l'arbre pondéré que $p(A_2) = \dfrac{8}{11}$.

3) Le prix du billet pour le film A est de 6 Dt et de 5 Dt pour le film B.

On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Exercice n°8 :

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes. Dans les questions 1 et 2 on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne. Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1) Soit les évènements suivants :

A « Les trois boules sont rouges. »

B « Les trois boules sont de la même couleur. »

C « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »

a) Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.
b) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$.
2) Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n + 5$ boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les évènements suivants : D « Tirer deux boules rouges. »

E « Tirer deux boules de la même couleur. »

a) Montrer que la probabilité de l'événement D est $p(D) = \dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

b) Calculer la probabilité $p(E)$ de l'évènement E en fonction de n. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E) \geq \dfrac{1}{2}$?

Exercice n°9 :

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.

1) Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $P(X > 6) = 0,3$. Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.
2) À quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?
3) Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$.
4) Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
5) On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

Exercice n°10 :

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second. La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second. On note :

– D l'évènement « le composant est défectueux » ;

– F_1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur » ;

– F_2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».

1) a) Dessiner un arbre pondéré.
   b) Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que $p(D) = 0{,}0225$.
   c) Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} près.

2) Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?
3) La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.
a) Sachant que $p(X > 5) = 0{,}325$, déterminer λ.
   Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0{,}225$.
b) Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?
c) Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

Exercice n°11 :

Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :

- les ingénieurs .
- les opérateurs de production .
- les agents de maintenance.

Il y a 8 % d'ingénieurs et 82 % d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.

A) Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise. On note :

- M l'événement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance » .
- O l'événement : « le personnel interrogé est un opérateur de production » .
- I l'événement : « le personnel interrogé est un ingénieur » .
- F l'événement : « le personnel interrogé est une femme ».

1) Construire un arbre pondéré correspondant aux données.
2) Calculer la probabilité d'interroger :
   a) un agent de maintenance ; b) une femme agent de maintenance ;
   c) une femme.

B) Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue. Des études ont montré que sur une journée :

- la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002 ;

- la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003 ;
- la probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04 .

On note :

A l'événement : « l'alarme se déclenche » ; B l'événement : « une panne se produit ».

1) Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,037.
2) Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.
3) Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

Exercice n°12 :(Bac Sc-exp 2014 session contrôle)

Lors d'une étude vétérinaire faite sur les vaches d'une région agricole, on a remarqué la présence d'une maladie M et que la probabilité qu'une vache soit atteinte par cette maladie est égale à 0,1.

Un fermier de cette région possède un troupeau de 20 vaches.

1) On note X la variable aléatoire égale au nombre de vaches de ce troupeau atteintes par la maladie M et on considère les deux événements suivants :

A : " Aucune vache de ce troupeau n'est atteinte par la maladie M "

B : " Au moins une vache de ce troupeau est atteinte par la maladie M ".

a) Justifier que $p(A) = (0,9)^{20}$.

2) Pour dépister la maladie M chez les 20 vaches du fermier, on procède ainsi :

On effectue d'abord une analyse sur un échantillon contenant un mélange du lait des 20 vaches. Si le résultat est positif, on effectue une analyse du lait de chaque vache.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre d'analyses possibles effectuées.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de l'espérance E(Y) de la variable Y.

Exercice n°13 :

X est la variable aléatoire de la loi continue et uniforme sur [0 ; 1]. Donner la probabilité des événements suivants :

a. $p(0{,}4 < X < 0{,}6)$ **b.** $p(X > 0{,}35)$ **c.** $p\left(X \in \left[\frac{1}{3} ; \frac{1}{2}\right]\right)$ **d.** $p(X = 0{,}5)$