« *Chaque grand poète intègre le monde d'une façon qui n'est qu'a lui* » **Pierre Emmanuel**

Exercice n°1 :

Calculer les intégrales suivantes .

1) $\int_0^1 \left(x^4-\frac{1}{3}x^2+x-1\right)dx$ 2) $\int_0^1 \left(\frac{3x}{(x^2+1)^2}\right)dx$ 3) $\int_{-1}^1 \left(\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-x^2)^4\right)dx$ 4) $\int_0^{\pi} \left(\sin(2x+1)\cos^5(2x+1)\right)dx$

5) $\int_0^{\pi} \left(\frac{2\sin t}{(2+\cos t)^3}\right)dt$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)dt$ 7) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1+\tan x}{\cos^2 x}\right)dx$ 8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^4 x+2\sin^2 x\right)dx$ 9) $\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \left(\frac{2x}{\cos^2 x}\right)dx$

10) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(x(x^2+1)^{2014}\right)dx$ 11) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2\alpha+1}{\cos^2 x}\right)dx$ 12) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin x-\sin^3 x\right)dx$ 13) $\int_{-1}^2 \left(\left|x^2-1\right|\right)dx$ 14) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+1}\,dx$

Exercice n°2 :

Calculer au moyen d'une intégration par partie les intégrales suivantes .

1) $\int_0^{\pi} \left(x\cos(3x)\right)dx$ 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4x\sin(2x)\right)dx$ 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2\sin(x)\right)dx$ 5) $\int_0^{\pi} \left((1+x)\sin\left(\frac{x}{4}\right)\right)dx$.

Exercice n°3 :

Soient deux réels a et b tels que a<b. On pose $I_0=\int_a^b \sqrt{b-x}\,dx$ et pour tout $n\in IN^*$ $I_n=\int_a^b (x-a)^n\sqrt{b-x}\,dx$.

1) Justifier l'existence de I_n.
2) Calculer I_0 en fonction de a et b.
3) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} .

Exercice n°4 :

Soit $U_n=\int_0^1 \left(\frac{dx}{x^n+1}\right)$, $n\in IN^*$.

1) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $U_n\le 1$.
2) Montrer que la suite U_n est convergente.
3) Démontrer que $0\le 1-U_n\le\frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice n°5 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\frac{1}{\cos x}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J à préciser.

2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[1,+\infty[$ et déterminer $(f^{-1})'(x)$ pour tout $x \in [1,+\infty[$.

3) En déduire l'intégrale : $I = \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \right)$. Donner une interprétation géométrique de I.

Exercice n°6 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \cos x$.

1) a) Calculer f'(x) pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Justifier que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J à préciser.

2) Soit g la fonction réciproque de f.
a) Montrer que f dérivable sur [0,1[.

b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$: $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3) a) Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) Montrer que $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{6}$.

Exercice n°7 :

Soient f_0 et f_1 les fonctions définies sur [0,1] par $f_0(x) = \sqrt{1-x^2}$ et $f_1(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

1) On désigne par C_0 et C_1 les courbes représentatives de f_0 et f_1 dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions f_0 et f_1.
b) Etudier la position relative de C_0 et C_1.
c) Construire C_0 et C_1.

2) On pose pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ $F(x) = \int_0^{\sin x} f_0(t)\,dt$.

a) Montrer que F dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et calculer F '(x).

b) En déduire F (x) pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

c) Vérifier que $\int_0^1 f_0(t)\,dt = \frac{\pi}{4}$.

d) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du domaine limité par les courbes C_0 et C_1 et les droites d'équation x = 0 et x = 1. Calculer $\mathcal{A}$.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ et $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,dx$.

a) Montrer que I_n est décroissante. En déduire que la suite I_n est convergente.

b) Démontrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice n°8 :

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x^2}{(x+1)^4}$ et φ la primitive de f sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en1.

1) Pour tout x ∈ $[0,+\infty[$, on considère la fonction g définie par : $g(x)=\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.

   a) Montrer que g dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout x ∈ $]0,+\infty[$: $g'(x)=-\frac{1}{(x+1)^4}$.

   b) En déduire l'expression de g (x) en fonction de x.

2) a) Déduire de tout ce qui précède un expression de φ(x) en fonction de x.

   b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$ et la valeur de $\varphi(0)$.

   c) Dresser le tableau de variation de φ.

3) Soit (I_n)la suite définie pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{(1+t)^4} dt$.

   a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante , en déduire qu'elle est convergente.

   b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$ en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice n°9 :

Soit la suite (I_n) définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$; $n \geq 1$.

1) Etablir que $1-I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$; $n \geq 1$.

2) Montrer que $0 \leq 1-I_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

3) En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice n°10 :

Soit $u(x)=2\sin x-1$ définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

1) Etudier le sens de variation de u sur I et montrer que $u\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=]-3,1[$.

2) Soit $F(x)=\int_0^{u(x)} \frac{dt}{\sqrt{-t^2-2t+3}}$ pour tout x∈ $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

   a) Justifier l'existence de F sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer F '(x) pour tout x∈ $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Calculer $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et montrer que $F(x)=x-\frac{\pi}{6}$ pour tout x∈ $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

3) Soit $J=\int_{-1}^{\sqrt{3}-1}\frac{dt}{\sqrt{-t^2-2t+3}}$. Montrer que $J=F\left(\frac{\pi}{3}\right)-F(0)$, puis calculer J.

Exercice n°11 :

1) Calculer $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

2) Soit la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\sqrt{x}\tan x$ dont la courbe (C_f) est représentée ci-contre dans le plan P muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On considère le solide engendré par la rotation autour de l'axe $(O;\vec{i})$ de la surface délimitée dans le plan P par l'axe $(O;\vec{i})$, la droite d'équation $x=\frac{\pi}{4}$ et la courbe (C_f). Sachant que l'unité graphique est de 2 cm, calculer le volume V du solide en cm^3.

Exercice n°12 :

1) Calculer en fonction de a le volume de corps de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des x de la courbe d'équation $y=\frac{1}{x}$, pour x variant entre 1 et a.

2) Vers quel nombre tend ce volume lorsque a tend vers l'infini ?