Exercice n°1 :

Soit f la fonction définie sur [-1,1] par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur [-1,1].
2) Montrer que f est dérivable en 0 et donner l'équation de la tangente T à (C_f) au point 0.
3) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 et à gauche en 1. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
4) Dresser le tableau de variation de f.
5) Soit g la fonction définie sur [-1,1] par : $g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. Déterminer $gof(x)$ pour tout x de [-1,1].
6) Pour tout $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$, on pose $h(x) = g(\tan x)$.
   a) Simplifier h(x).
   b) Déterminer $h'(x), h''(x)$ et $h^{(n)}(x)$ $\left(\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* h^{(n)} \text{ la dérivé } n^{éme} \text{ de } h\right)$.

Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \sqrt{x}$.

1) Déterminer le domaine de dérivabilité de f.
2) Calculer s'il existe $f'(1)$.
3) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = f(\tan x)$. Montrer que g est dérivable en $\dfrac{\pi}{4}$ et calculer $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Exercice n°3 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - \sqrt{x - x^2}$.

1) Déterminer le domaine de continuité de f.
2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en 1. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.
   b) Déterminer le domaine de dérivabilité de f.
   c) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0,1[$.
3) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = f(\cos x)$. Etudier la dérivabilité de g en $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice n°4 :

A) Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.
   1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.
      b) Déterminer le domaine de dérivabilité de f.
   2) a) Etudier les variations de f.
      b) Tracer la courbe (C_f) de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

B) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x)=f\left(1+\tan x\right)$.

1) Vérifier que $g(x)=\frac{1}{\cos x}$ pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

2) Etudier les variations de g et tracer sa courbe sa courbe dans un autre repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Exercice n°5 :

A) On considère la fonction g définie sur [0,1[par : $g(x)=\sqrt{\frac{2x}{1-x^2}}$.

1) a) Etudier la dérivabilité de g en 0.Interpréter géométriquement le résultat.
   b) Etudier les variations de g.

2) Tracer la courbe $\left(C_g\right)$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

3) Vérifier que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ $g\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\tan x}$.

B) On considère la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=2\sqrt{\tan x}-1$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f en 0.
   b) Etudier les variations de f.

2) a) Montrer que pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ $f'(x)>1$(On pourra distinguer les cas ou $\tan x\geq 1$ et $\tan x\leq 1$.)
   b) On pose $h(x)=f(x)-x$. Etudier les variations de h.
   c) Montrer que l'équation h(x) = 0 admet dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ une seule solution α .Vérifier que $\alpha\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right[$.
   d) En déduire le signe de h(x).

Exercice n°6 :

A) Soit f la fonction définie sur $\left[1,+\infty\right[$ par : $f(x)=1-3\sqrt{x^2-1}$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f en 1.Interpréter graphiquement le résultat.
   b) Déterminer le domaine de dérivabilité de f.

2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3) a) Montrer que $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $\left[1,+\infty\right[$.
   b) Vérifier que $\sqrt{\alpha^2-1}=\frac{1}{3}$.
   c) Déduire le signe de $f(x)$.

B) Soit g la fonction définie sur $\left[1,+\infty\right[$ par : $g(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}+3}{x}$.

1) Etudier la dérivabilité de f en 1.Interpréter géométriquement le résultat.

2) Montrer que pour tout $x\in\left]1,+\infty\right[$ $g'(x)=\frac{f(x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

3) Vérifier que $g(\alpha)=\dfrac{10}{3\alpha}$.

4) Dresser le tableau de variation de g.

5) Tracer la courbe (C_f).

Exercice n°7 :

Soit f la fonction définie sur IR₊ par : $f(x)=\dfrac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Etudier le sens de variation de la fonction φ définie par : $\varphi(x)=f(x)-x$. En déduire que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α et que $\alpha\in\left]\dfrac{4}{5},1\right[$

2) a) Montrer que pour tout x de IR₊ , on a $|f'(x)|-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{(x-1)^2-3}{x^2+2x+2}\right]$.

b) En déduire que pour tout x de IR₊ , on a $|f'(x)|\le\dfrac{1}{4}$.

c) Montrer que pour tout x de IR₊ , on a $|f(x)-f(\alpha)|\le\dfrac{1}{4}|x-\alpha|$.

Exercice n°8 :

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{1+x^2}}+2$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur IR et calculer $f'(x)$ pour tout $x\in$ IR.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à sa tangente T au point A(0,2).

d) Construire (C_f) et T.

2) a) Montrer que pour tout $x\in\left[\sqrt{2},+\infty\right[$, on a $0\le f'(x)\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $\left[\sqrt{2},+\infty\right[$ une solution unique α et que $\alpha\in\left]4,5\right[$.

3) Soit la suite $(U_n)_{n\in IN}$ définie par : $U_0=2$ et $U_{n+1}=f(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n\in$ IN $U_n\ge 2$.

b) Montrer que pour tout $n\in$ IN $|U_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}|U_n-\alpha|$.

c) En déduire que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ est convergente et préciser sa limite .

Exercice n°9 :

1) Montrer que l'équation : $x^3-x-1=0$ admet une unique solution α sur $]1,2[$.

2) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a : $x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$.

3) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$.

a) Etudier les variations de f .

b) Tracer la courbe (C_f) et la droite $\Delta : y = x$ dans le repère orthonormé .

c) Déduire graphiquement que α est l'unique solution de l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ dans $]0,+\infty[$.

4) a) Montrer que pour tout $x \geq 1$, on a $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

b) En déduire que pour tout $x \geq 1$, on a $|f(x) - f(\alpha)| \leq \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$.

5) Soit $(U_n)_{n\in IN}$ définie par : $U_0>0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que $n \in IN^*; U_n > 1$

b) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

c) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ $|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |U_1 - \alpha|$

d) En déduire que $(U_n)_{n\in IN}$ est convergente vers une limite que l'on déterminera.

Exercice n°10 :

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

1) Dresser le tableau de variation de f .

2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans IR une solution unique α et que $\alpha \in \left]\dfrac{2}{3},1\right[$.

3) Soit $(U_n)_{n\in IN}$ définie par : $U_0=1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

4) a) Montrer que pour tout $x \in \left[\dfrac{2}{3},1\right]$ $|f'(x)| \leq \dfrac{5}{9}$.

b) Montrer que $n \in IN$; $\dfrac{2}{3} \leq U_n \leq 1$.

c) Montrer que pour tout $n \in IN$ $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{5}{9}|U_n - \alpha|$.

d) Montrer que pour tout $n \in IN$ $|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{5}{9}\right)^n |1 - \alpha|$

e) En déduire que $(U_n)_{n\in IN}$ est convergente vers une limite que l'on déterminera.