Exercice n°1 :

Soit la fonction f définie sur IR_+ par : $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.
   b) Montrer que f réalise une bijection de IR_+ sur un intervalle J à déterminer.
   c) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.
2) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α dans IR_+ et que $\alpha\in\left]\dfrac{1}{2},1\right[$.
3) On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases}U_0=1\\ U_{n+1}=f(U_n) \text{ pour tout } n\in IN\end{cases}$
   a) Montrer que pour tout $n\in IN$ $\dfrac{1}{2}\le U_n\le 1$.
   b) Montrer que pour tout x et y dans $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, $|f(x)-f(y)|\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}|x-y|$.
   c) En déduire que pour tout $n\in IN$, $|U_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}|U_n-\alpha|$.
   d) Prouver que pour tout $n\in IN$, $|U_n-\alpha|\le\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n|U_0-\alpha|$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\alpha$.

Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=2-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J à préciser. Tracer C_f.
2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$. Tracer $C_{f^{-1}}$.
3) a) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$. Vérifier que $\alpha\in]1,2[$.
4) b) En déduire la position relative de C_f par rapport à $\Delta : y=x$.
5) Soit la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases}U_0=0\\ U_{n+1}=f(U_n) \text{ pour tout } n\in IN\end{cases}$
   a) Montrer que pour tout $n\in IN$ $0\le U_n\le\alpha$.
   b) Montrer que pour tout n de IN (U_n) est croissante.
   c) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°3 :

On considère la fonction f définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin x}$.

1) Etudier la dérivabilité à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.
2) Montrer que f dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer f'(x) pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

3) Montrer que f réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ à un intervalle J à préciser.

4) Montrer que f^{-1} dérivable sur J et que pour tout $x \in J$ $f^{-1}(x) = \frac{-4x}{4+x^4}$.

5) Pour tout x>0 on pose $g(x) = f^{-1}\left(\sqrt{2x}\right) + f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

   a) Calculer $f^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$.
   b) Montrer que g est dérivable sur J et calculer g'(x).
   c) Montrer que pour tout $x \in J$ $g(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice n°4 :

Soit la fonction f définie sur $]-1,1[$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur IR.
2) b) Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.
3) a) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$ $f(x) \geq x$.
4) b) En déduire que pour tout $x \in]0,+\infty[$ $f^{-1}(x) \leq x$.
5) Soit la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = g^{-1}(U_n) \text{ pour tout } n \in \mathrm{IN} \end{cases}$

   Avec g est la restriction de f sur]0,1[.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathrm{IN}$ $0 \leq U_n \leq \frac{3}{4}$.
   b) Montrer que U est décroissante.
   c) En déduire que U est divergente et calculer sa limite.

4) Expliquer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{IR}$

Exercice n°5 :

Soit la fonction f définie sur I=]0,1[par : $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x-x^2}}$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur I et que pour tout x de I $f'(x) = \frac{1}{2\left(\sqrt{x-x^2}\right)^3}$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Déterminer f ''(x) et montrer que (C_f) admet un point d'inflexion I au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

   b) Ecrire l'équation de la tangente T à (C_f) au point I.

   c) Tracer (C_f) et T.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
   b) Tracer la courbe (C') de f^{-1}.

4) Soit h la fonction définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x) = \frac{1}{2} f\left(\cos^2 x\right)$.

5) a) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; $h(x) = \text{cotan}(2x)$.

b) Montrer que h réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur IR.

6) a) Soit ψ la fonction réciproque de h . Calculer $\psi(0);\psi(1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x)$.

b) Montrer que ψ est dérivable sur IR et que pour tout x de IR ; $\psi'(x) = -\frac{1}{2(1+x^2)}$.

c) Montrer que pour tout x>0 , $\psi(x) + \psi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}$.

7) On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \psi\left(\frac{1}{n+k}\right)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [0, n]$: $\psi(2n) \leq \psi(n+k) \leq \psi(n)$.

b) En déduire que $\frac{\pi}{4} - \psi(n) \leq V_n \leq \frac{\pi}{4} - \psi(2n)$

c) Montrer que V est converge et déterminer sa limite.

Exercice n°6 :

On considère l'application f définie sur $]0,4[$ par: $f(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{4x-x^2}}$, on désigne par C_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Etudier les variations de f.
b) Montrer que f est une bijection de]0,4[sur IR.
c) Soit g la fonction réciproque de f. Montrer que pour tout x de IR $g(x) = 2 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$.

2) Montrer que l'équation f(x)=x admet dans]0,4[une solution unique $\alpha > 2$

3) a) Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 2.
b) Etudier la position de C_f par rapport à T. Tracer C_f , T et la courbe C' représentant g.

4) On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 > \alpha \\ U_{n+1} = g(U_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Démontrer que pour tout $n \in IN$ $U_n \geq \alpha$.

b) Déterminer graphiquement le signe de g(x)-x.

c) En déduire le sens de variation de (U_n).

d) Montrer que la suite (U_n) admet une limite ℓ que l'on précisera.

5) Soit la fonction h définie sur un intervalle E= $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x) = \frac{2}{g[2tg(x)]}$; $h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

a) Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $h(x) = \frac{1}{1+\sin x}$.

b) Montrer que h réalise une bijection de E sur un intervalle J à préciser. Déterminer $h^{-1}(2)$ et $h^{-1}\left(2+\sqrt{2}\right)$.

c) Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur J puis déterminé sa fonction dérivée .