Prof :Khammour.Khalil **Année Scolaire :**2013/2014	**Série d'exercices :** **Intégrales+Primitives + Arithmétiques**	$4^{ème}$ Math **Tél :27509639**

Exercice n°1 :

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à proposer un contre exemple.

1) Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [-1,1], dont la dérivée est continue sur cet intervalle.

   Si $f(-1) = -f(1)$ alors : $\int_{-1}^{1} t\,f'(t)dt = -\int_{-1}^{1} f(t)dt$

2) Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle [0,3]

   Si $\int_0^3 f(t)dt \leq \int_0^3 g(t)dt$ alors pour tout x appartenant à [0,3] $f(x) \leq g(x)$.

3) « $5^{750} - 1$ est un multiple de 7 ».

Exercice n°2 :

1) Montrer que pour tout n ∈ IN : $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0(\text{mod}7)$.
2) Résoudre dans Z l'équation : $x^2 - x + 4 \equiv 0(\text{mod}6)$.
3) a) Montrer que pour tout $x \in \{2,3,4,5,6\}$: $x^6 \equiv 0(\text{mod}7)$.
   b) Soit $A_n = 4^n + 5^n + 6^n + 9^n + 10^n$ $(n \in IN)$
   Montrer que si $n \equiv 1(\text{mod}6)$ alors $A_n \equiv 6(\text{mod}7)$.
   c) Déduire le reste de A_{2011} modulo 7.

Exercice n°3 :

Dans le graphique (Voir Annexe), (C) et (C') sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction dérivable sur IR et d'une primitive F de f sur IR.

Par lecture graphique :

1) a)Vérifier que (C) est la courbe représentative de F.
   b) Calculer l'aire de la partie limitée par (C') ,l'axe des abscisses et les droites x=0 et x=2.
2) a) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C') au point O.
   b)Montrer que f est une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.
3) Représenter dans le même repère la courbe (C'') de f^{-1} .

4) Soit $I = \int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}} f^{-1}(x)dx$ Interpréter géométriquement I puis calculer I.

5) On suppose dans la suite que f définie sur IR par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et F sa primitive tel que F(0)=2.

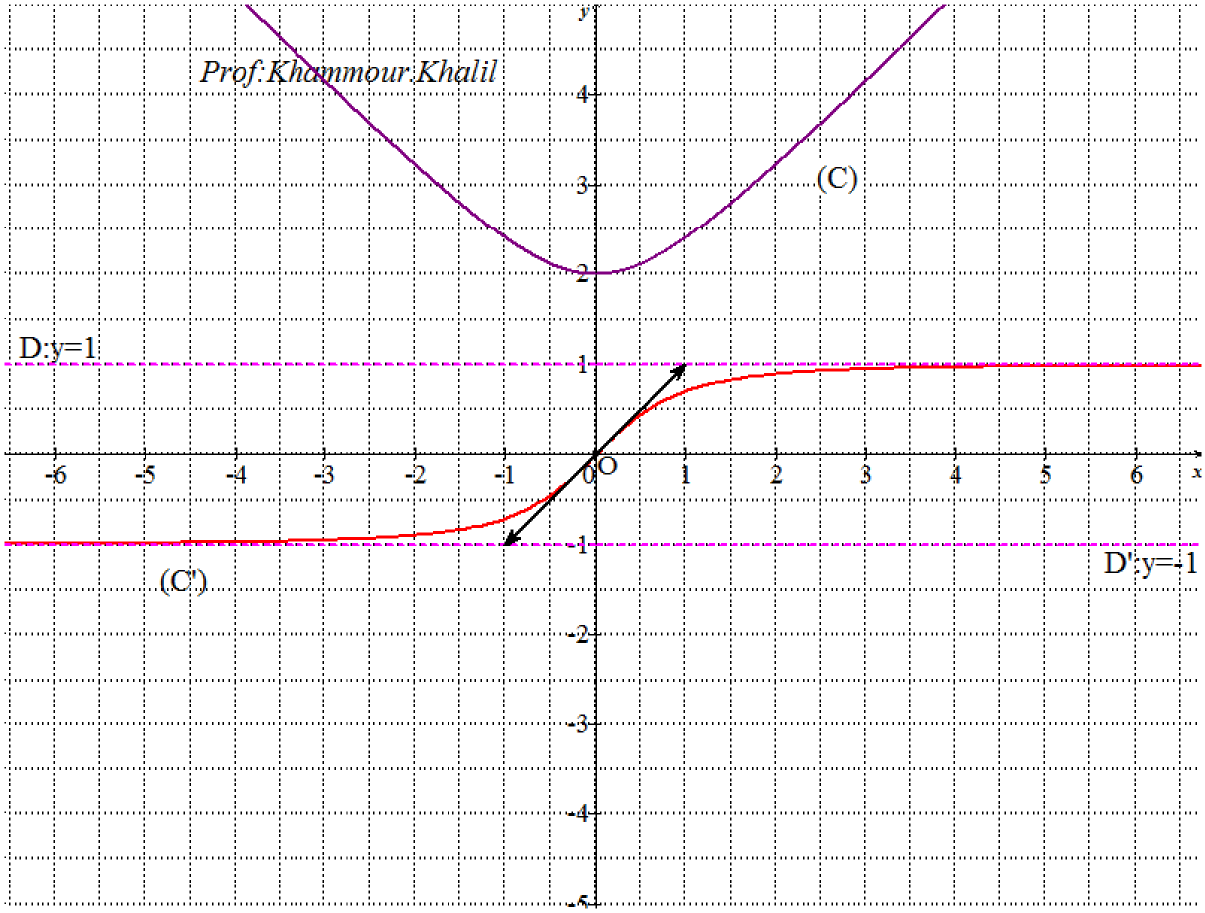
Soit G la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par G(x) = F(Tg x).

a) Montrer que G est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et que G '(x)=$\frac{\sin x}{cos^2 x}$ pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}[$.

b) En déduire G(x) pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}[$.

c) Déterminer alors $F(\sqrt{3})$.

Annexe



Exercice n°4 :

Soient f_0 et f_1 les fonctions définies sur [0,1] par $f_0(x) = \sqrt{1-x^2}$ et $f_1(x) = x\sqrt{1-x^2}$

1) On désigne C_0 et C_1 les courbes représentatives de f_0 et f_1 dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions f_0 et f_1 .

b) Etudier la position relative de C_0 et C_1.

c) Construire C_0 et C_1.

2) On pose pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $F(x) = \int_0^{\sin(x)} f_0(t)dt$.

a) Montrer que F dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $F'(x)$.

b) En déduire $F(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Vérifier $\int_0^1 f_0(x)dt = \frac{\pi}{4}$.

d) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire du domaine limité par les courbes C_0 et C_1 et les droites d'équation x=0 et x=1 .Calculer $\mathscr{A}$.

3) On pose pour tout n de IN^* Soit $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ et $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dt$

a) Montrer que I_n est décroissante .En déduire que la suite I_n est convergente.

b) Démontrer que $0 \le I_n \le \frac{1}{n-1}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice n°5 :

Soit n un entier naturel non nul .

1) a) les restes des divisions euclidiennes de 3^n par 7 sont les valeurs de n :

i)$\{0,1,2,3,4,5,6\}$ ii) $\{1,2,3,4,5,6\}$ iii) $\{0,1,2,3,4,5\}$.

b) On peut vérifier que :

i) $3^6 \equiv 1(mod\ 7)$ ii) $3^{n+6} \equiv 3^n(mod\ 7)$ iii) 3^{n+6} et 3^n ont des restes ≠.

2) a) Quel est le reste de la division euclidienne de 3^n par 7.
b)En déduire le reste de la division euclidienne de 3^{2014} par 7.