Prof :Khammour.Khalil **Année Scolaire :**2013/2014	**Série n°12 :** **Fonction Logarithme**	$4^{ème}$ Math **Tél :27509639**

Exercice n°1 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty} \ln^2 x - 3\ln x + 1$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x - 1}{x - 2\ln x}$	$\lim_{x\to e} \frac{\ln x - \ln e}{x - e}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^2+\frac{1}{x}\right)}{x}$	$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$
$\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)$	$\lim_{x\to 0^+} \ln^2 x - \ln x$	$\lim_{x\to 0^+} x\sqrt{1+\ln^2 x}$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$	$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)\ln x$	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$

Exercice n°2 :

Soit g définie sur [0,+∞[par : $g(x) = 1 - \frac{1}{x} + 2\ln x$

1) a) Etudier les variations de g.

   b) En déduire le signe de g sur [0,+∞[

2) Soit f définie sur [0,+∞[par $f(x) = 1 - x + (2x - 1)\ln x$.

   a) Etudier les variations de f.

   b) Etudier la position relative de C_f par rapport à $\Delta : y = x$.

Exercice n°3 :

A) Soit g la fonction définie par : $g(x) = x - \ln x$

1) Déterminer le tableau de variation de g.

2) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g(x) \geq 1$.

B) On considère la fonction f définie sur IR_+ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

   b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = 2(g(x) - 1)$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

   c) Tracer C.

Exercice n°4 :

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-\ln x}{x}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
2) En remarquant que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$ on a : $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$,déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.
3) a) Calculer f '(x) pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$.
   b)Etudier le signe de $-2 + \ln x$ sur $]0,+\infty[$.En déduire le signe de f '(x) sur $]0,+\infty[$.
   a) Dresser le tableau de variation de f.
4) On note le point I le point d'intersection entre la courbe (C) et l'axe des abscisses, déterminer les coordonnées de point I.
5) On note (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 1.Déterminer une équation de (T).
6) Tracer la courbe (C) et la tangente (T) .
7) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :$g(x) = (\ln x)^2$.
   a) Calculer g '(x) pour tout $x \in]0,+\infty[$.
   b) En déduire une primitive de la fonction $\frac{\ln x}{x}$ sur $]0,+\infty[$.

Partie B

1) a) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$ par :$h(x) = [\ln(x)]^2$.On désigne par h ' sa fonction dérivée sur $]0\,,+\infty[$.Calculer h '(x).
   b)En déduire une primitive de la fonction $x \to \frac{\ln x}{x}$.
2) a) Calculer l'intégrale $J = \int_1^e f(x)dx$ où f est la fonction définie dans la partie A.
   b) Interpréter graphiquement l'intégrale J.

Exercice n°5 :

Soit $n \in IN^*$ et f_n la fonction définie sur IR, par : $\begin{cases} f_n(x) = x(\ln x)^n & \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

C_n désigne la courbe représentative de f_n dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que f_n est continue à droite en 0.Etudier la dérivabilité de f_n à droite en 0.
   b) Montrer que f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'_n(x) = (n + \ln x)(\ln x)^{n-1}$.

2) a) Dresser le tableau de variation de f_n suivant la parité de n (Si n est impair on traitera deux cas n=1 et $n \geq 3$).
   b) Montrer que toutes les courbes C_n passent par trois points fixes :l'origine O du repère et deux autres points A et B tel que $0 < x_A < x_B$.

3) a) Etudier la position relative de C_1 et C_2 puis construire C_1 et C_2 dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

b) Calculer l'aire de la partie délimitée par les deux courbes C_1 et C_2 et les deux droites $\Delta_1 : x = 1$ et $\Delta_2 : x = e$

Exercice n°6 :

Partie A

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = x\ln\left(x+\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

C_f désigne la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

   b) Montrer que f dérivable sur IR^*_+ et calculer f '(x) pour tout x de IR^*_+.

2) a) Dresser le tableau de variation de f ' ,en déduire le signe de f '(x) sur IR^*_+.

   b) Etudier les variations de f. En déduire que pour tout x de IR_+ $0 \leq f(x) < 1$.

   c) Tracer (C_f).

Partie B

1) a) Montrer que pour $t \in IR_+$ on a : $t - \ln(1+t) \leq \frac{t^2}{2}$.

   b) En déduire que pour tout x de IR^*_+ $0 \leq 1 - f(x) < \frac{1}{2x}$.

2) a) Montrer que pour tout $k \in IN^*$ $\frac{1}{k+1} \leq \ln(1+k) - \ln k \leq \frac{1}{k}$.

   b)En déduire que pour tout $n \in IN^*$ on a :$1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n} \leq 1 + \ln n$

Partie C

On considère les suites U et V définies sur IN^* par : $U_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$ et $V_n = \frac{n^n}{n!}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $\ln(V_n) = -n\ln U_n$.

2) b) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a :$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

3) c) En déduire que pour tout $n \in IN^*$ on a : $\ln(V_{n+1}) - \ln(V_n) = f(n)$.

4) a) En utilisant **Partie B** 1) b) et **Partie C** 1) c) montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a :

   $0 \leq 1 + \ln(V_{n+1}) - \ln(V_n) \leq \frac{1}{2n}$

   b)En déduire que pour tout $n \in IN^*$ on a : $0 \leq n - 1 - \ln(V_n) \leq \frac{1}{2}(1 + \ln n)$.

   c)Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln(V_n) = 1$.En déduire que la suite U_n converge vers $\frac{1}{e}$.

Exercice n°7 :

Partie A

Soit a et b deux réels strictement positifs , avec a$\leq$ b.

1) Montrer en appliquant les inégalités des accroissements finis que :

$$1-\frac{a}{b}\leq \ln b-\ln a\leq \frac{b}{a}-1$$

2) En déduire que pour tout x>0 , $1-\frac{1}{x}\leq \ln x\leq x-1$ (Indication :distinguer deux cas $x\geq 1$ et $x\leq 1$).

Partie B

On considère la fonction f définie sur IR₊ par :$\begin{cases} f(x)=x\ln(x) & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de et la dérivabilité de f en 0.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Montrer en utilisant **Partie A** que $x-1\leq f(x)\leq x^2-x$; $x\geq 0$.
4) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé ,unité 2cm.

Partie C

1) Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet dans $[1,+\infty[$ une seule solution α_n.
2) a) Montrer que $\alpha_1-1\leq 1\leq {\alpha_1}^2-\alpha_1$

   b)En déduire que :$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leq \alpha_1\leq 2$
3) Comparer $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.En déduire que (α_n)est décroissante.
4) a) Montrer que (α_n) est convergente .On notera ℓ sa limite.

   b) Prouver que $f(\ell)=0$.

   c)En déduire la valeur de ℓ .

Exercice n°8 :

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=x\ \ln(x+1)$.

C_f désigne la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
2) b) L'axe des abscisses est il tangent à la courbe C_f au point O ?
3) a) Dresser le tableau de variation de f
4) b)Tracer C_f.
5) Montrer que l'équation f (x) =0,25 admet une seule solution sur [0,1] ,on note α cette solution .Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
6) a) Déterminer trois réels a , b et c tel que pour tout x $\neq$-1 $\frac{x^2}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}$.
7) b) Calculer l'intégrale $I=\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$.

8) A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2,calculer en unités d'aires l'aire $\mathcal{A}$ de la partie limitée par la courbe (C) et les droites d'équations x=0 ; x=1 et y=0.

9) La suite (I_n) est définie sur IN par : $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$

10) a) Déterminer le sens de variation de la suite (I_n).La suite (I_n) est t-elle convergente ?

11) b) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul $0 \leq I_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$.

En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice n°9 :

Soit la fonction f définie sur]1,+∞[par : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 1.
2) Calculer f '(x) pour tout x de]1,+∞[
3) a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $\frac{2}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n-1) \leq \frac{2}{n-1}$.

   b)En déduire que $0 \leq f(n) \leq \frac{2}{n^2-1}$.
4) a) Vérifier que pour tout réel $x \neq -1$ $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

   b) On pose pour tout $n \geq 2$ $S_n = \frac{2}{n^2-1} + \frac{2}{(n+1)^2-1} + \cdots + \frac{2}{(2n-1)^2-1} + \frac{2}{(2n)^2-1}$

   Montrer que $S_n = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$ (en utilisant a))
5) Pour tout $n \geq 2$ on pose $W_n = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)$. Déduire des résultats précédentes que la suite W est convergente et calculer sa limite.
6) Pour tout $n \geq 2$ on pose $U_n = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$.

   Vérifier que $W_n = U_n - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2(2n+1)}{n-1}\right)$ en déduire la limite ℓ de U_n.

Exercice n°10 :

On considère la fonction f définie sur]0,+∞[dont on donne la représentation graphique C_f dans le repère ci-dessous.

On admet que :

- Le point A de coordonnées (1 ;1) appartient à la courbe C_f.
- La tangente (T) en A à la courbe C_f passe par le point de coordonnées (2 ;0).
- La courbe C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2.
- L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe de la fonction f.

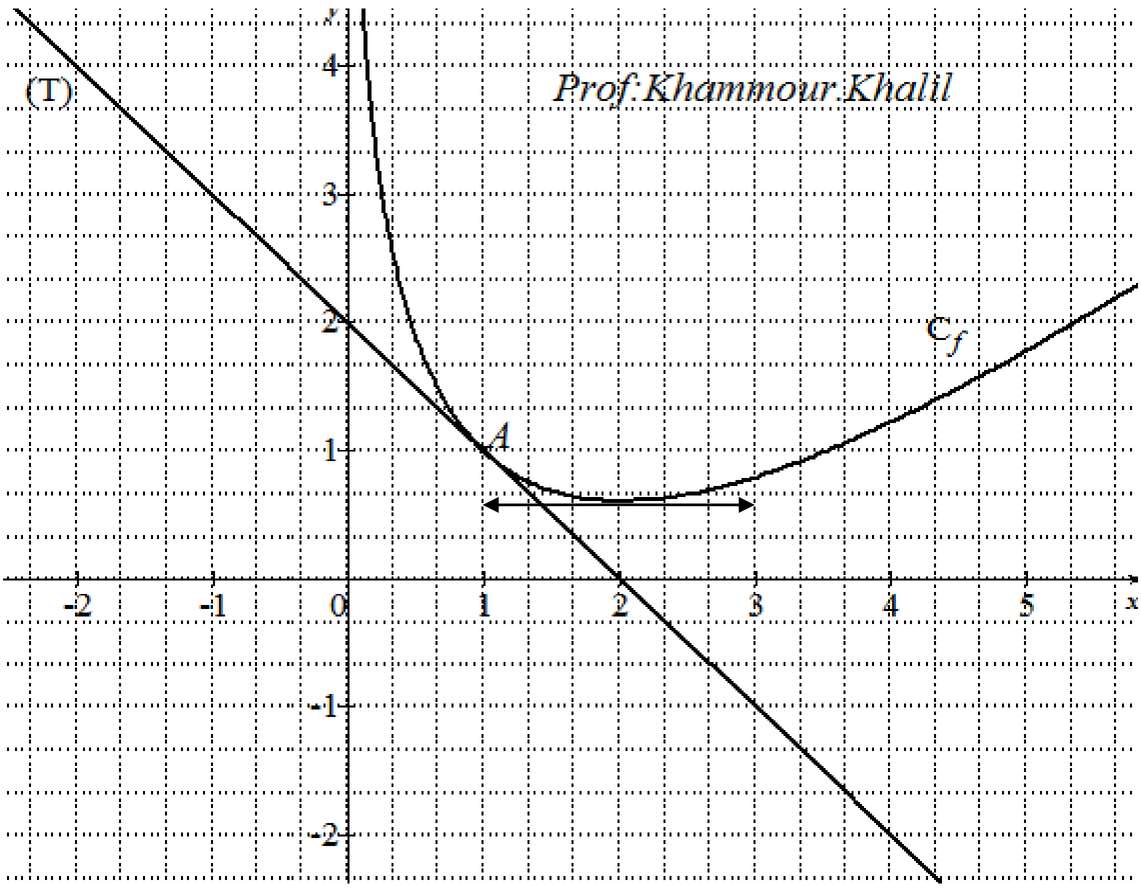
Partie A :

1) Donner ,par lecture graphique ou en utilisant les données de l'énoncé, les valeurs de f (1) , f '(1) et f '(2) ,où f ' est la dérivée de f sur]0,+∞[.
2) On admet que l'expression de f (x) sur]0,+∞[est : $f(x) = ax + b + c\ln x$ où a ,b et c sont des nombres réels.
   a) Calculer f '(x) en fonction de x et de a, b et c.
   b) Démontrer que les réels a ,b et c vérifient le système : $\begin{cases} a+b=1 \\ a+c=-1 \\ 2a+c=0 \end{cases}$
   c) Déduire de la question précédente les valeurs de a ,b et c, puis l'expression de f (x).

Dans cette partie ,on admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie pour tout réel x appartenant à]0,+∞[par : $f(x) = x - 2\ln x$

Partie B :

1) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C_f .
2) Soit F la fonction définie pour tout réel x∈]0,+∞[par : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2x\ln x$
   b) Montrer que F est une primitive de la fonction f sur]0,+∞[.
   c) Calculer F(1).



Exercice n°11 :

1) Soit g la fonction définie sur l'intervalle]-1,+∞[par :$g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.
   a) Déterminer $\lim_{x\to -1^+} g(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x)$.
   b) Dresser le tableau de variation de g .
   c) Calculer g (0).En déduire le signe de g (x) sur l'intervalle]-1,+∞[.
2) On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle]-1,+∞[par :$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1} - x$ et soit (C_f) sa courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   a) Montrer que pour tout $x \in]-1,+\infty[$ $f'(x) = -\frac{g(x)}{(x+1)^2}$
   b) Dresser le tableau de variation de f.
3) a) Montrer que la droite Δ d'équation y=-x est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de+∞
   b) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à Δ.
   c) Tracer la courbe (C_f).
4) Soit h la fonction définie sur l'intervalle]-1,+∞[par :$h(x) = [\ln(x+1)]^2$.
   a) Calculer h '(x).
   b) En déduire une primitive de f sur l'intervalle]-1,+∞[.