# liste d'exercices n°2 : Géométrie dans l'espace

**Exercice 1 :**

L'espace $\mathscr{E}$ étant rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On considère les points $A(-1,-1,1)$ ; $B(3,2,-1)$ et $C(1,\frac{1}{2},1)$.

1. a) Montrer que les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés .
   b) Soit le plan $P = (ABC)$ .Montrer que $P$ :$3x - 4y - 1 = 0$.
2. Soit $m$ un réel. On considère l'ensemble $S_m$ des points $M(x, y, z)$ de $\mathscr{E}$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2(m+1)y + m^2 + 2m = 0$.
   a) Montrer que $S_m$ est une sphère dont on précisera en fonction de $m$ le rayon $R_m$ et les coordonnées du centre $I_m$.
   b) Déterminer l'ensemble des points $I_m$ lorsque $m$ décrit $\mathbb{R}$.
3. a) Étudier suivant les valeurs de $m$ la position relative de $S_m$ et $P$.
   b) Montrer que l'intersection de $S_5$ et $P$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

**Exercice 2 :**

Dans l'espace $\mathscr{E}$, on considère trois points non alignés $O$, $A$ et $B$ et on désigne par $G$ le point défini par $\overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

1. Vérifier que $\overrightarrow{GO} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.
2. Soit $C$ le point de $\mathscr{E}$ n'appartenant pas au plan $(OAB)$ et $S$ l'ensemble des points $M$ de $\mathscr{E}$ tels que $(\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{MC} = 0$.
   a) Montrer que $M \in S$ si et seulement si $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MC} = 0$.
   b) En déduire la nature de $S$.
3. Dans toute la suite, on suppose que l'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
   On suppose aussi que les points $A$, $B$ et $C$ ont pour coordonnées $(6,0,0)$ ; $(0,6,0)$ et $(0,0,4)$.
   a) Vérifier que les points $O$, $A$ et $B$ ne sont pas alignés.
   b) Déterminer les coordonnées du point $G$ vérifiant : $\overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.
   c) Vérifier qu'une équation cartésienne de $S$ est :$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y - 4z = 0$.
   d) Soit $P$ le plan d'équation : $z = 0$. Montrer que le plan $P$ coupe $S$ suivant le cercle de diamètre $[OG]$.

**Exercice 3 :**

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On donne les points $A(2,-3,-1)$, $B(1,0,2)$ et $C(0,1,3)$.

1. a) Montrer que les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés .
   b) Écrire une équation cartésienne du plan $P$ passant par les points $A$, $B$ et $C$
2. Pour tout réel $t$ de l'intervalle $[-\pi, \pi]$, on considère l'ensemble $S_t$ des points $M(x, y, z)$ vérifiant l'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2tx - 2ysint + 2z + t^2 + sin^2t - 1 = 0$.
   Montrer que $S_t$ est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
3. a) Étudier suivant les valeurs de $t$, l'intersection de la sphère $S_t$ et du plan $P$.
   b) Dans le cas où le plan $P$ est tangent à la sphère $S_t$, déterminer les coordonnées du point de contact.