liste d'exercices : Similitudes du plan

***Exercice* 1 :**
Le plan orienté dans le sens direct.
On considère un carré direct $ABCD$ de centre O.
Soit P un point variable du segment $[BC]$ distinct de B.
On note Q le point d'intersection des droites (AP) et (CD).
La perpendiculaire Δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.
On désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. a) Déterminer l'image de la droite (BC) par r.
   b) Montrer que les triangles ARQ et APS sont des triangles rectangles et isocèles.
2. On note N le milieu de $[PS]$ et M le milieu de $[QR]$.
   Soit S la similitude directe de centre A,de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   a) Déterminer les images respectives de R et P par S.
   b) Déterminer le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment $[BC]$ privé du point B.
   c) Montrer que les points B,M, N et D sont alignés.
3. Soit $f = S \circ S_{(AB)}$.
   a) Montrer que f est une similitude indirecte dont on précisera le rapport et le centre.
   b) Construire l'axe de f.

***Exercice* 2 :**
Dans le plan orienté on donne un carré de centre G tel que $AB = 2$. On désigne par E,F,H,I,J,K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$,$[AD]$,$[BC]$,$[EF]$,$[FG]$,$[DG]$ et $[BG]$.

1. Soit f la similitude directe qui transforme B en F et E en K .
   a) Montrer que f est de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{-3\pi}{4}$.
   b) Montrer que $f((EG)) = (BD)$ et que $f((BG)) = (GF)$.
   c) En déduire que G est le centre de f.
   d) Déterminer alors $f(L)$ et $f(D)$.
2. Soit g la similitude indirecte qui transforme K en F et F en G.
   a) Déterminer le rapport de g.
   b) Déterminer $g \circ f(B)$ et $g \circ f(E)$.
   c) Montrer que $g \circ f$ est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.
   d) En déduire que $g(G) = A$.
   e) Montrer alors que D est le centre de g et déterminer l'axe de g.

***Exercice* 3 :**
Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $AC = 2AB$.

1. Soit f la similitude directe telle que $f(B) = A$ et $f(A) = C$.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de f.
   b) Soit Ω le centre de f. Montrer que Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC).
2. La parallèle à la droite (AB) passant par C coupe $(A\omega)$ en D.
   a) Monter que $f(C) = D$ et que $\overrightarrow{\Omega D} = -4\overrightarrow{\Omega A}$.
   b) Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[CD]$. Montrer ΩIJ est un triangle rectangle en Ω.

3. Soit g la similitude indirecte telle que $g(B) = A$ et $g(A) = C$.
   a) Vérifier que $g = f \circ S_{(AB)}$.
   b) Soit G le centre de g. Montrer que $\overrightarrow{GC} = 4\overrightarrow{GB}$ puis construire l'axe Δ de g.
   c) On suppose que le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI})$ est orthonormé direct.
   Déterminer la forme complexe de g.
   d) Déterminer alors l'affixe du point G.

***Exercice* 4 :**

Soit P un plan d'un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
On considère l'application f de P dans P définie analytiquement par

$$f\colon P \to P \quad M(x,y) \mapsto M'(x',y') \text{ tels que } \begin{cases} x' = x + y - 1 \\ \\ y' = x - y \end{cases}$$

1. Montrer que f est une similitude dont on précisera le rapport.
2. Déterminer les coordonnées du centre Ω de f.
3. Déterminer l'ensemble D des points M de P tels que $\overrightarrow{\Omega M'} = \sqrt{2}\overrightarrow{\Omega M}$.
   En déduire que f est une similitude indirecte que l'on caractérisera.
4. Soient les droites : Δ : $(1+\sqrt{2})x + y - 3 - 2\sqrt{2} = 0$ et Δ_1 : $x - y + 1 = 0$.
   Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites $f(\Delta)$ et $f(\Delta_1)$.
5. Soit ξ le cercle de centre $I(1;1)$ et de rayon $r = 2$. Déterminer ξ' l'image de ξ par f.