liste d'exercices : Coniques

Dans tous les exercices le plan est orienté.

Exercice 1 :
Le plan est muni d'un repère orthonormé $R = (o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. On désigne par (C_1) l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y^2 - 2\sqrt{3}y - 2x = 0$.
   Déterminer la nature de (C_1). Donner les éléments caractéristiques de (C_1) et la construire.
2. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 2 et F un point de $\mathscr{C}$.
   a) Justifier que la parabole de foyer F et de directrice $\Delta : x = -2$ passe par O.
   b) Tout point de $\mathscr{C}$ peut-il être le foyer d'une parabole de directrice Δ passant par O ?
3. On se propose de déterminer l'ensemble (E) des sommets des paraboles de directrices $\Delta : x = -2$ et de foyer un point du cercle $\mathscr{C}$ privé du point $A(-2, 0)$.
   Soit $M(x, y)$ un point de (E) et $F(a, b)$ le foyer de la parabole de sommet M et de directrice $\Delta : x = -2$.
   a) Déterminer x et y en fonction de a et b.
   b) En déduire que $(x + 1)^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$.
   c) Conclure et tracer (E).

Exercice 2 :
On considère OAB un triangle direct rectangle et isocèle en O tel que $AB = 4$.
On note I le milieu du segment $[AB]$ et F le point défini par $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OI}$.
Soit (P) la parabole de foyer F et de sommet O.
On muni le plan d'un repère orthonormé direct $R = (o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que $\overrightarrow{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}$.

1. a) Montrer que l'équation de la parabole (P) est $y^2 = 2x$.
   b) Montrer que (P) passe par A et B.
   c) La tangente T_A à (P) coupe (OI) en un point J. Montrer que O est le milieu de $[IJ]$.
   d) Tracer T_A puis (P).
2. Soit $M(x_1, y_1)$ un point de la parabole (P) distinct de O.
   La perpendiculaire à (OM) en O recoupe (P) en un point $N(x_2, y_2)$.
   On suppose que la droite (MN) a pour équation $x = ay + b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
   a) Montrer que y_1 et y_2 sont les solutions de l'équation $y^2 - 2ay - 2b = 0$.
   b) Exprimer $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$ à l'aide de y_1 et y_2.
   c) En déduire la valeur de b.
   d) Montrer alors que lorsque le point M varie sur la parabole (P), la droite (MN) passe par à un point fixe à préciser.

Exercice 3 :
On considère dans le plan un triangle OFA rectangle en O tel $\widehat{OAF} = \theta$, $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $OF = 6$.
Soit M un point du plan, les droites parallèles à (OF) et à (AF) passants par M coupent respectivement la droite (OA) aux points H et M'.
On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des points M du plan tel que : $MM' = MF$.

1. Montrer que $M \in \mathscr{H}$ si et seulement si $\frac{MF}{MH} = \frac{1}{\sin\theta}$.
2. En déduire La nature de $\mathscr{H}$.

3. On pose $\theta = \frac{\pi}{6}$. Soit $(o, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan tel que : $\vec{i} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OF}$ et $\vec{j} = \frac{1}{OA}\overrightarrow{OA}$.
   a) Montre que $M \in \mathscr{H} \iff 3x^2 + 12x - y^2 - 36 = 0$.
   b) Donner l'équation réduite de $\mathscr{H}$.
   c) Déterminer les coordonnées des foyers, des sommets et les équations des asymptotes Δ_1 et Δ_2.
   d) Tracer $\mathscr{H}$.
3. Soit le point $I(3, 3\sqrt{3})$.
   a) Vérifier que $I \in \mathscr{H}$ et montrer qu'une équation de la tangente T à $\mathscr{H}$ au point I est : $5x - \sqrt{3}y - 6 = 0$.
   b) T coupe les asymptotes Δ_1 et Δ_2 respectivement en E et F, montrer que I est le milieu du segment $[EF]$.
5. Soit $\Gamma = \{M(x,y) \in \mathscr{H} \text{ tel que } 2 \leq x \leq 3 \text{ et } y \geq 0\}$ et S la solide de révolution engendré par la rotation de Γ autour de l'axe $(o, \vec{i})$.
   a) Représenter Γ sur le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
   b) Calculer le volume de S.

Exercice 4 :

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère l'application f de P dans P définie analytiquement par

$$f\colon P \to P \quad M(x,y) \mapsto M'(x',y') \text{ tels que } \begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} \\ \\ y' = x\sqrt{3} + y \end{cases}$$

1. a) Soit $z = x + iy$ l'affixe de M et $z' = x' + iy'$ l'affixe de M'. Exprimer z' en fonction de z.
   b) En déduire que f est une similitude directe et donner ses éléments caractéristiques.
2. Soit $\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation $x^2 - 3y^2 = 3$ dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
   a) Déterminer ses asymptotes , son sommet son foyer d'abscisses positives et la directrice.
   b) Calculer son excentricité et construire $\mathscr{H}$.
3. Soit $\mathscr{H}'$ la courbe image de $\mathscr{H}$ par f.
   a) Prouver que $\mathscr{H}'$ est une hyperbole dont on précisera l'excentricité.
   b) Montrer que $\mathscr{H}'$ est la représentation graphique de la fonction g définie par $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + \frac{6}{x})$.
4. Soit (D) la droite d'équation : $x = 2$ et $(D') = f((D))$.
   a) Montrer que la droite (D') a pour équation $x + \sqrt{3}y - 8 = 0$.
   b) Déterminer les points d'intersection de (D') et $\mathscr{H}'$.
   c) Dans l'annexe on donne la représentation graphique de (D') et $\mathscr{H}'$.
   Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan comprise entre (D') et $\mathscr{H}'$.
5. Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_{\sqrt{3}}^{2} \sqrt{\frac{x^2}{3} - 1}\, dx$, en déduire sa valeur.

Annexe