

Liste d'exercices : Fonctions exponentielles

Exercice 1 :

A/ Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

(C_f) désigne la courbe de f dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a) Dresser le tableau de variation de f .
b) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur $] -1, 1[$. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in] -1, 1[$.
2. a) Montrer que f est impaire.
b) Ecrire une équation de la tangente Δ à (C_f) au point 0.
c) Etudier la position de (C_f) par rapport à Δ .
3. Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$.
4. Calculer l'aire \mathcal{A} de la région du plan limitée par (C_f) l'axe des abscisses et les droites : $x = -1$ et $x = 0$.

B/ Soit F la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $F(x) = \int_0^{\ln x} f(t) dt$.

1. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $F'(x) = \frac{x-1}{x(x+1)}$.
2. a) Calculer $F(1)$, déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $F(x) = \int_1^x \frac{t-1}{t(t+1)} dt$.
b) Expliciter $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Retrouver \mathcal{A} .
c) Dresser le tableau de variation de F .

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^x}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.
2. a) Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = -\frac{2+e^{-x}}{(1+e^x)^2}$.
b) Dresser le tableau de variation de f .
3. a) Justifier que la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.
b) Utiliser le tableau de signe ci-dessous pour préciser la position relative de C_f et (T) .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x) + \frac{3}{4}$	$-$	0	$+$

- c) Tracer (T) et C_f .
4. Soit λ un réel strictement positif. On désigne par \mathcal{A}_λ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f , les axes du repère et la droite d'équation $x = \lambda$.
a) Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = e^{-x} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.
b) Montrer que $\mathcal{A}_\lambda = -e^{-\lambda} + \ln(1+e^\lambda) + 1 - \ln 2$.
c) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_\lambda$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
2. Dresser le tableau de variation de f .
3. Dans l'annexe 1 on a représenté les courbes Γ_1 et Γ_2 d'équation respective $y = e^x$ et $y = \ln x$.
 - a) Déterminer les points d'intersections de C_f et Γ_1 .
 - b) Montrer que C_f est au dessus de Γ_1 .
 - c) Construire la demi-tangente à C_f au point d'abscisse 1.
 - d) Construire C_f .
4. On se propose de déterminer l'aire de la partie du plan limitée par C_f et Γ_1 .
 - a) Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle J à préciser.
 - b) Tracer C' la courbe de la fonction réciproque de f .
 - c) Montrer que $f^{-1}(x) = \ln^3(x)$ pour tout $x \in J$.
 - d) Calculer $\int_1^e \ln^3(x) dx$.
 - e) Conclure.

Annexe 1

