EXERCICE 1

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. ***a)*** Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.

b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.

c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - 10{,}5$.

a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b) En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

c) Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

EXERCICE 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par : $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. On donne à la fin de l'exercice (à rendre avec la copie) une partie de la courbe représentative C de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1. ***a)*** Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. ***a)*** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$.

b) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.* Valider par une démonstration les conjectures émises à la question **1. *b***).

3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{1 + x^2}$.

et $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. ***a)*** Étudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Vérifier que : $f(x) = (x-2)\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)$.

c) Montrer que la droite Δ d'équation : $y = x - 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

d) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

2. ***a)*** Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(1+x^2)^2}$.

b) En déduire le signe de $f'(x)$ établir le tableau de variations complet de f.

3. Montrer que l'équation : $f(x) = -10$ admet une unique solution que l'on notera α dans $\mathbb{R}$. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

4. ***a)*** Déterminer les abscisses des points A et B de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à Δ. A sera le point d'abscisse négative.

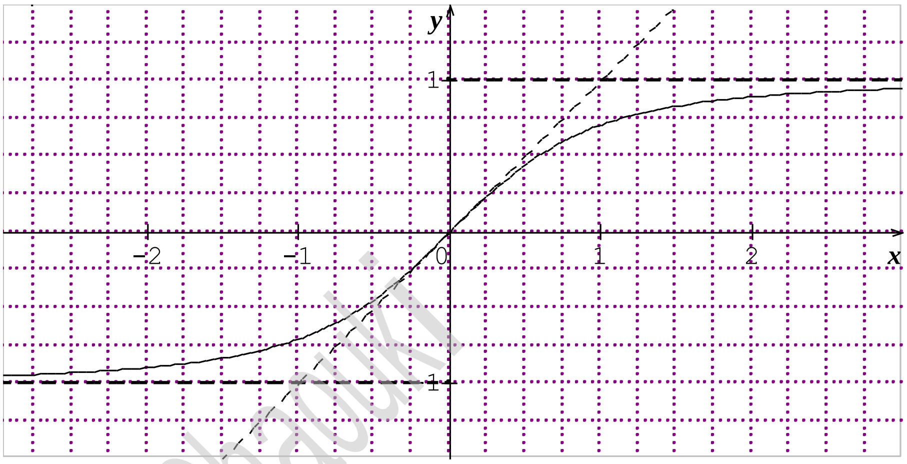
b) Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point D d'abscisse 2.

c) Tracer la droite Δ, les trois tangentes précédentes ainsi que les tangentes horizontales et la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

d) Montrer que la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ a pour valeur approchée 3 cm à 10^{-2} près.

Rappel de 1°S :

La distance d'un point $M_0(x_0\ ;\ y_0)$ à la droite Δ d'équation $ax + by + c = 0$ est donnée par la formule : $d(M_0\ ;\ \Delta) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.



EXERCICE 4

L' exercice suivant comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c et d. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F).

On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On appelle Γ la courbe représentant f et $\mathscr{C}$ la courbe représentant la fonction dérivée f' de f. On a représenté ci-dessus la courbe $\mathscr{C}$ de f'. On y remarque que :

- $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- La droite d'équation $y = x$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

A) La courbe Γ de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

B) La courbe Γ de f possède une et une seule tangente parallèle à (Ox).

C) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

D) On a $f''(0) = 1$.

Schéma de l'EXERCICE 2