Professeur : *Briki Chaker*

E-mail: chakerbriki@yahoo.fr

Série n° 9

Mathématique

Bac Math

2013/2014

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I. 1) Montrer que pour tout x appartenant à $[0,+\infty[$ $\quad f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$.

2) a) Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = x - 2\ln x - \ln(1 + \dfrac{1}{x^2})$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Donner une équation de la tangente Δ à la courbe (C) au point O.

b) Donner la position relative de la droite Δ et la courbe (C).

c) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite Δ et la courbe (C).

II. Soit G la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$ dt.

1) a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa fonction dérivée.

b) En déduire que pour tout x appartenant à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ $G(x) = x$.

c) Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$.

2) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)dx = \ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

b) En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

Exercice 2 :

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x\ln x$.

   a) Etudier les variations de g.

   b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

   Vérifier que $3,5 < x_0 < 3,6$.

   c) En déduire le signe de g.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

   On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x^2)}{x\,(1+x^2)^2}$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

   c) Vérifier que $f(\sqrt{x_0}) = \dfrac{1}{2\,x_0}$.

   d) Tracer la courbe (C). (On prendra $x_0 \approx 3,6$)

3) Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \displaystyle\int_1^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt$.

   a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

   b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0,1[$, $\ln x \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}\ln x$.

   c) En déduire que $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1+\ln n}{n}\right) \leq a_n \leq 1-\dfrac{1+\ln n}{n}$.

   d) Montrer alors que la suite (a_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2},1]$.

Exercice 3 :

1) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x \ln x + x$.

   a) Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$; $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

   b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

2) Dans la figure (2) de l'annexe ci-jointe, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des fonctions g et h définies sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = \ln x$.

   $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ se coupent en un point d'abscisse β.

   a) Par une lecture graphique donner le signe de $f'(x)$.

   b) En déduire le sens de variation de f.

   c) Montrer que $f(\beta) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1$.

3) On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   a) Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$.

   b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que $0,4 < x_1 < 0,5$ et $3,8 < x_2 < 3,9$.

   c) Placer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points $A(\beta, 0)$ et $B(0, \frac{1}{\beta})$ et en déduire une construction du point de coordonnées $(\beta, f(\beta))$.

   d) Tracer $\mathscr{C}_f$.

4) Pour tout réel t de $]0, +\infty[\setminus \{\beta\}$, on désigne par $\mathscr{A}(t)$ l'aire de la partie du plan S(t) limitée par les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ et la droite d'équation $x = t$.

   a) Montrer que pour tout réel $t \in]0,+\infty[\setminus \{\beta\}$, $\mathscr{A}(t) = f(\beta) - f(t)$.

   b) Soit $t_0 > \beta$. Hachurer $S(t_0)$.

   c) Montrer qu'il existe un réel unique t_1 dans $]0, \beta[$ tel que $\mathscr{A}(t_1) = \mathscr{A}(t_0)$.

   Hachurer $S(t_1)$.