EXERCICE formule de Stirling

youssef boulila

On pose pour tout réel x $f(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

1. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe de φ , et les droites d'équations respectives $x=0$ et $y=1$ (c'est bien y et non x).
2. Calculer la dérivée de $f\circ\varphi$ et en déduire $f(0), f(1), f(\sqrt{3})$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I=\int_0^{\sqrt{3}} \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$.
4. On pose $g(x)=\frac{f(x)}{x}$. Montrer que $\frac{1}{1+x^2}\leq g(x)\leq 1$ et en déduire la limite de g en 0.

   Déterminer la limite de $\lim_{x\to 0} f(x)\times \ln x$.

II-1 ☹ Fonction moyenne. On rappelle que $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f. (fonctions composées)

Pour toute fonction f monotone, indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^+$, on définit la fonction moyenne de f sur $[0;x]$ par $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\lim_{x\to 0^+} F(x)=f(0)$
2. Montrer que f est monotone de même sens que f.
3. À l'aide d'une intégration par parties sur ., montrer que $F^{(n)}(x)=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$

II-2 Intégrales de Bessel (fonctions composées, fonctions réciproques cf. II 34)

On pose $f(t)=\frac{1}{2t^2+2t+1}$, définie sur $\mathbb{R}$, F est une primitive de f, et $g(x)=F\left(\frac{1+\tan x}{2}\right)$.

1. Calculer $g'(x)$, en déduire $g(x)$ puis $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

   On pose alors $I_{p,q}=\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$ et $u_n=I_{n,n}$.
2. Montrer à l'aide d'un encadrement que $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre $I_{p+1,q+1}$ et $I_{p+2,q}$.
4. En déduire que $u_n=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. Comparer avec la valeur de u_n obtenue directement après développement de $(1-t)^n$ par la formule du binôme (on ne cherchera pas à réduire la somme obtenue).
5. Montrer que $\int_0^1 \frac{\left(2t(1-t)\right)^{n+1}}{2t^2-2t+1}\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En intégrant $f(t)-1-\sum_{k=1}^{n} 2^k t^k(1-t)^k$, déterminer $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} 2^k u_k$.

II-3 ☹Intégrales de Wallis et première formule de Stirling (de première espèce).

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cdot \mathrm{d}x$ (intégrale de Wallis).

1. Calculer I_0 et I_1. Montrer que la suite $\left(I_n\right)$ est décroissante.
2. Par une intégration par parties, montrer que $n \cdot I_n = \left(n-1\right) \cdot I_{n-2}$.
3. En déduire :
   a. La valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}}$;
   b. que $I_{2n} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{\left(2n\right)!}{\left(2^n n!\right)^2}$ et $I_{2n+1} = \dfrac{\left(2^n n!\right)^2}{\left(2n+1\right)!}$
4. On pose $u_n = \dfrac{n! \mathrm{e}^n}{n^n \sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$. On admet que $\left(u_n\right)$ est convergente.

   Déterminer la limite de la suite $\left(u_n\right)$ en comparant $\dfrac{\left(u_n\right)^2}{u_{2n}}$ et $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$. En déduire un équivalent de la factorielle en $+\infty$, c'est à dire une fonction f telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n!}{f\left(n\right)} = 1$. On écrira alors $n! \sim f\left(n\right)$ (formule de Stirling).