

EXERCICES

ISOMETRIES PLANES

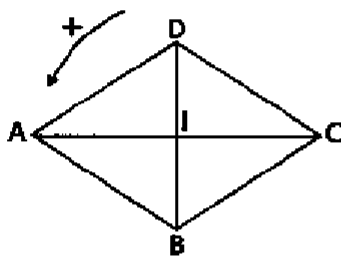
Composées de symétries axiales

1 Soit ABCD un rectangle direct. On considère les symétries axiales s_1, s_2, s_3 et s_4 d'axes respectifs (AB), (DC), (BC) et (AD).

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications : $s_1 \circ s_2, s_3 \circ s_4, s_1 \circ s_3$ et $s_3 \circ s_1$.

2 Soit ABCD un carré direct. On considère les symétries axiales s_1, s_2 et s_3 d'axes respectifs (AB), (AC) et (DC). Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications : $s_1 \circ s_2, s_2 \circ s_3$ et $s_3 \circ s_1$.

3 Soit ABCD un losange direct de centre I ; montrer que $s_{(AC)} \circ s_{(BD)} = s_{(BD)} \circ s_{(AC)}$.

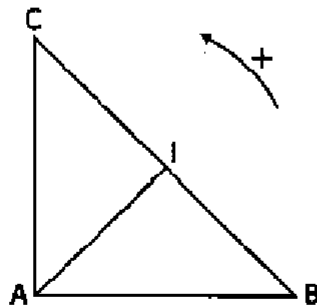


4 Soit ABCD un carré direct de centre I ; on considère les symétries axiales s_1, s_2 et s_3 d'axes respectifs (AC), (BD) et (AB).

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $s_1 \circ s_2$ et de $s_2 \circ s_1$.
b. Même question pour les composées $s_1 \circ s_3$ et $s_3 \circ s_1$.

5 Soit ABC un triangle direct isocèle rectangle en A et I le milieu de [BC]. On note s_1, s_2 et s_3 les symétries axiales d'axes respectifs (AB), (AC) et (AI).

a. Déterminer $s_1 \circ s_2$ et $s_2 \circ s_1$.
b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r_1 = s_1 \circ s_3$ et $r_2 = s_3 \circ s_2$.
c. Déterminer $r_1 \circ r_2$.



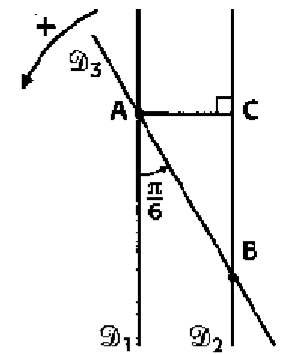
6 Soit ABC un triangle équilatéral direct. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de :

a. $s_{(BC)} \circ s_{(BA)}$ b. $s_{(AB)} \circ s_{(AC)}$
c. $s_{(CB)} \circ s_{(CA)}$

7 Soit \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux droites parallèles et \mathcal{D}_3 une droite sécante à \mathcal{D}_1 et à \mathcal{D}_2 , avec un angle de $\frac{\pi}{6}$.

On note s_1, s_2 et s_3 les symétries axiales d'axes $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et \mathcal{D}_3 .

a. Déterminer la nature des applications $s_1 \circ s_2$ et $s_2 \circ s_1$.
b. On pose $r_1 = s_3 \circ s_1$ et $r_2 = s_3 \circ s_2$. Caractériser r_1 et r_2 .
c. On pose $r_3 = s_1 \circ s_3$ et $r_4 = s_2 \circ s_3$. Caractériser r_3 et r_4 .



Décomposition de translations et de rotations

8 Soit ABCD un carré direct et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer la droite Δ telle que $r = s_{\Delta} \circ s_{(AC)}$.
b. Déterminer la droite Δ' telle que $r = s_{(AC)} \circ s_{\Delta'}$.

9 Soit ABCD un rectangle direct et I, J les milieux respectifs de [BC] et [AD]. On considère la translation t de vecteur \overrightarrow{BC} .

a. Déterminer la droite Δ telle que $t = s_{\Delta} \circ s_{(IJ)}$.
b. Déterminer la droite Δ' telle que $t = s_{(IJ)} \circ s_{\Delta'}$.

10 Soit ABCD un losange direct de centre O.

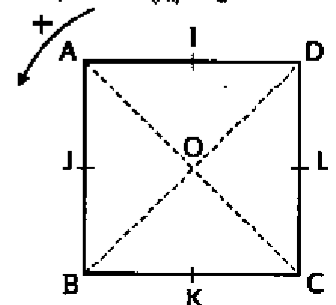
Déterminer les droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ et Δ_4 telles que :

$$\begin{aligned} t_{\overrightarrow{BD}} &= s_{\Delta_1} \circ s_{(AC)} ; \\ t_{\overrightarrow{BD}} &= s_{(AC)} \circ s_{\Delta_2} ; \\ t_{\overrightarrow{AO}} &= s_{\Delta_3} \circ s_{(BD)} ; \\ t_{\overrightarrow{AO}} &= s_{(BD)} \circ s_{\Delta_4} . \end{aligned}$$

11 Soit ABC un triangle équilatéral direct et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On note I le milieu de [BC].

a. Déterminer la droite Δ telle que $r = s_{(AC)} \circ s_{\Delta}$.
b. Déterminer la droite Δ' telle que $r = s_{(AI)} \circ s_{\Delta'}$.

12 Soit ABCD un carré direct de centre O ; on note I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AD], [AB], [BC] et [CD]. On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$;



déterminer les droites Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 et Δ_4 telles que :

$$r = s_{(BD)} \circ s_{\Delta_1} ; r = s_{(AC)} \circ s_{\Delta_2} ;$$

$$r = s_{(IK)} \circ s_{\Delta_3} ; r = s_{(IL)} \circ s_{\Delta_4}$$

13 Soit ABC un triangle équilatéral direct ; on considère la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On note I le milieu

du segment [AC] et J son symétrique par la symétrie axiale d'axe (BC).

Déterminer les droites Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 telles que :

$$r = s_{(BC)} \circ s_{\Delta_1} ; r = s_{\Delta_2} \circ s_{(B)} ; r = s_{\Delta_3} \circ s_{(BC)}$$

14 Soit t la translation de vecteur \vec{u} telle que $t = s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1$ où s_1 et s_2 sont deux symétries axiales d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2 .

- Que peut-on en conclure pour les droites Δ_1 et Δ_2 ?
- Que peut-on en conclure pour le vecteur \vec{u} ?

15 Déterminer toutes les rotations r telles que : $r = s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1$ où s_1 et s_2 sont deux symétries axiales d'axes sécants Δ_1 et Δ_2 .

Isométries

16 Soit ABC un triangle équilatéral et f une isométrie telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

Démontrer que $A'B'C'$ est un triangle équilatéral.

17 Soit ABCD un carré et f une isométrie telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ et $f(D) = D'$.

- Prouver que $A'B' = A'D' = B'C' = C'D'$.
- Prouver que $A'C' = B'D'$.
- En déduire la nature du quadrilatère $A'B'C'D'$. Justifier la réponse.

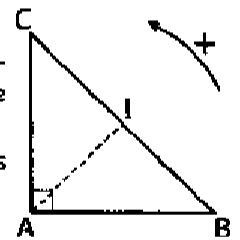
18 Prouver qu'une isométrie f transforme le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon R en un cercle \mathcal{C}' dont on déterminera le centre et le rayon.

19 Soit f , g et h trois isométries.

- Démontrer que $F = f \circ g \circ h$ est une isométrie.
- Démontrer que $G = h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$ est une isométrie.
- Déterminer $F \circ G$ puis $G \circ F$.

20 Soit ABC un triangle direct isocèle et rectangle en A et I le milieu de [BC].

Déterminer les isométries f et g telles que $f(A) = A$, $f(B) = C$, $f(C) = B$ et $g(A) = A$, $g(B) = C$ et $g(C) = B$.



21 Sachant que ABC est un triangle isocèle de sommet principal A, quelles sont les isométries f telles que : $f(A) = A$ et $f(B) = C$?

22 Soit ABC un triangle quelconque dont on note H l'orthocentre et f une isométrie telle que : $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

Prouver que $H' = f(H)$ est l'orthocentre du triangle $A'B'C'$.

Isométries et configurations

23 Soit s_1 , s_2 et s_3 trois symétries axiales ; on pose $r_1 = s_1 \circ s_2$ et $r_2 = s_2 \circ s_1$.

- Déterminer $r_1 \circ r_2$ et $r_2 \circ r_1$.
 - En déduire que $(s_1 \circ s_2)^{-1} = s_2 \circ s_1$.
- En utilisant le résultat du 1., déterminer en fonction de s_1 , s_2 et s_3 , la transformation $(s_1 \circ s_2 \circ s_3)^{-1}$.

24 Soit ABCD un carré direct de centre O ; on note I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AD], [AB], [BC] et [CD]. On note t la translation de vecteur BA et r la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- Déterminer la droite Δ telle que $t = s_{\Delta} \circ s_{(OL)}$.
- Déterminer la droite Δ' telle que $r = s_{(OL)} \circ s_{\Delta'}$.
- En déduire $t \circ r$.

25 * On considère quatre points A, B, C et D tels que $AB = CD$ et f une isométrie telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ et $f(D) = D'$.

1. On suppose que $A = B$.
Montrer que $C = D$ puis que $\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$.

2. On suppose que $A \neq B$.

- Démontrer que [AD] et [BC] ont le même milieu.
 - En déduire que $\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$.
3. Quelle est l'image d'un parallélogramme par une isométrie ? Justifier la réponse.

26 Soit ABCD un carré direct et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On note A', B', C', D' les images

- Démontrer que $B' = D$.
- Démontrer que A est le milieu de [BD'].
- Quelle est la nature du quadrilatère BCC'D'.

27 Soit ABC un triangle équilatéral direct. On note A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB] et r la rotation de centre A' et qui transforme B' en C'.

- Déterminer l'angle de la rotation r .
- Quelles sont les images de C et de C' par r ?
- En déduire les images des droites (AC) et (B'C').