Mathématiques

Terminale Scientifiques

Limites et continuité

☎ 20206426

Enseignant : Abdessattar El-Faleh

Année Scolaire :2013-2014

Lycée Secondaire Ali Zouaoui Hajeb Laayoun

Terminale Scientifiques

01 *Calculer les limites suivantes (si elles existent) :*

- $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos(x)\right]}{\sin\left[\sin(x)\right]}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin(x)\left[\cos(2x)-\cos(x)\right]}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x^2+x}-x^2}{\sqrt{x^2+1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sin(4\pi x)\tan(\pi x)$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-E(x)}{\sqrt{|x|}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos\left(x^3+\sqrt{x}-1\right)}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^3-4x^2+x-2}{x^2-4}$

- $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2\left(1+2+3+\cdots+E\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)\right]$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\left(E\left(\frac{1}{x}\right)+E\left(\frac{2}{x}\right)+E\left(\frac{3}{x}\right)+\cdots+E\left(\frac{k}{x}\right)\right)\right]$; $k\in\mathbb{N}^*$

02 *Soit* $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2+\cos(x)}-\sqrt{3}}{x^2} & \text{si } x\neq 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{12} & \text{si } x=0\end{cases}$

1- *Etudier la continuité de* f *en* 0

2- *Montrer que pour tout* $x\in\mathbb{R}^*$, on a $|f(x)|\leq\frac{2\sqrt{3}}{x^2}$

3- *En déduire* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

03 *Soit* $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2-\sqrt{x^2+4}} & \text{si } x\neq 0\\ a & \text{si } x=0\end{cases}$; $a\in\mathbb{R}$

1- *Déterminer la(es) valeur(s) de* a *pour que* f *soit continue en* 0

2- *Calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

04 *Soit* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une fonction continue. Montrer qu'au moins une des trois situations suivantes se produit :*

1- $f(x)=x$; $x\in\mathbb{R}$

2- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

3- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Indication : Posons $g(x)=f(x)-x$; $x\in\mathbb{R}$

05 Soit $f:[0,+\infty[\,\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=0$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$

06 Soit $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue telles que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

Montrer que f s'annule.

07 Montrer que les seules fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

08 Soit $f(x)=\tan\left[\dfrac{(x-1)\pi}{2}\right]$; $x\in\,]0,2[$

Montrer que f est continue sur $]0,2[$.

«Le raisonnement mathématique n'est jamais purement contemplatif. Il est actif et constructif et c'est l'activité constructive de l'esprit qui fait apparaitre un résultat nouveau »
EDMOND GOBLOT