DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$ 4ème Mathématiques

Exercice 1

1) Soit n et a deux entiers naturels non nuls tel que a divise $21n + 3$ et a divise $14n + 9$.

Montrer que a divise 21

2) En déduire les valeurs de a.

Exercice 2

Soit le polynôme $p(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

1) Montrer que si n est un entier tel que $p(n) = 0$ alors n divise 6.
2) Résoudre alors dans IR l'équation $p(x) = 0$.

Exercice 3

1) Soit n un entier, vérifier que $n^3 - 5n = (n + 3)(n^2 - 3n + 4) - 12$
2) Soit $A = \frac{n^3-5n}{n+3}$ déterminer les valeurs de n pour que A soit un entier.

Exercice 4

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7 et que $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est divisible par 11.

Exercice 5

Dans une division euclidienne le dividende vaut 217 et le reste est égal à 7, on désigne par b le diviseur et par q le quotient.

1) Montrer que $bq = 210$ avec $|b| > 7$.
2) En déduire les couples $(b\,, q)$ possibles.

Exercice 6

Trouver tous les entiers naturels n tel que :

$11111 \equiv 100\ (mod\ n)$ et $2112 \equiv 100\ (mod\ n)$.

Exercice 7

1) Vérifier les congruences suivantes : $2^{12} \equiv 1\ (mod\ 13)$ et $3^6 \equiv 1\ (mod\ 13)$.
2) En déduire que :$2^{70} + 3^{70} \equiv (mod\ 13)$

Exercice 8

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $4^n - 1 \equiv 0\ (mod\ 3)$.
2) Montrer que $4^{28} - 1 \equiv 0\ (mod\ 29)$.
3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $4^{4n} - 1 \equiv 0\ (mod\ 17)$.
4) Déterminer les entiers naturels n tel que $4^n - 1 \equiv 0\ (mod\ 5)$.
5) En déduire de ce qui précède quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Exercice 9

Soit n un entier naturel.

1) Déterminer pour tout entier n de $\{0\,, 1\,, 2, 3, 4\}$ le reste modulo 10 de 7^n.
2) Soit S un entier naturel tel que : $S = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{400}$.

Déterminer le chiffre des unités de S.

Kooli Mohamed Hechmi http://mathematiques.tk/

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équation suivantes : $3x \equiv 6\ (mod\ 7)$ $\quad x^2 + 2x - 1 \equiv 2\ (mod\ 4)$
$2x^2 - 3x + 4 \equiv 3\ (mod\ 6)$ $\quad -2x^2 + 3x - 1 \equiv 0\ (mod\ 6)$.

Exercice 11

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $10^n \equiv 1\ (mod\ 9)$
2) En déduire que si $n = 10p + q$ (p et q deux entiers) alors n est divisible par 9 si et seulement si $p + q$ est divisible par 9.
3) Donner alors un critère de divisibilité par 9.

Exercice 12

Soit n un entier naturel

1) Déterminer pour tout entier n de $\{0, 1, 2, \ldots, 6\}$ le reste modulo 7 de 3^n.
2) Montrer que $3^{n+6} + 3^n$ est divisible par 7.
3) a) Calculer le reste modulo 7 de 3^{1000}.
   b) Quelle est le chiffre des unités de 3^{1000} ?
4) Montrer que 3^n n'est pas divisible par 7.
5) On pose pour tout $n \geq 2$; $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}$.
   a) Montrer que U_n est divisible par 7 est équivaut à $3^n - 1$ est divisible par 7.
   b) En déduire les valeurs de n pour que U_n soit divisible par 7.

Exercice 13

On admet que 1979 est premier

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $2x \equiv 1\ (mod\ 1979)$.
2) On considère l'équation (E) : $x^2 - x + 494 \equiv 0\ (mod\ 1979)$.
   a) Soit x une solution de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}$.

Déterminer le reste de la division euclidienne de $(x-990)^2$ par 1979.

   b) En déduire les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 14

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube ce termine par : 2009 c'est-à-dire que $n^3 \equiv 2009\ (mod\ 10000)$.

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.
2) En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009\ (mod\ 16)$.
3) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$U_0 = 2009^2 - 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = (U_n + 1)^5 - 1$

   a) Montrer que U_0 est divisible par 5.
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n[U_n^4 + 5(U_n^3 + 2U_n^2 + 2U_n + 1)]$.
   c) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, U_n est divisible par 5^{n+1}.
4) a)Vérifier que $U_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1\ (mod\ 625)$.
   b) Montrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009\ (mod\ 625)$.
5) a) En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2009^{8001} - 2009 \equiv 0\ (mod\ 10000)$.
   b) Déterminer alors un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009