Révision : fonctions logarithmes – fonctions exponentiels – intégrale	MR : FARHATI HICHEM

EX 1 :

Partie A :

1) Soit f(x)=1+e^x(1-x)
   a) Montrer que f'(x)=-xe^x
   b) Dresser le tableau de variation de f.
   c) Montrer que Cf admet une branche infinie de direction (o,y) au voisinage de +∞.
   d) Montre que D :y=1 asymptote au voisinage de -∞.
   e) Montrer que f(x)=0 admet une seule solution αϵ[1 ;2].
2) a) Soit g la restriction de f sur [0 ;+∞[, montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} sur un intervalle que l'on précisera, et préciser son sens de variation .
   b) Tracer Cg et C g^{-1} dans un même repère
   3) a) calculer $\int_a^b xe^x\ dx$ puis comparer : $\int_0^\alpha f(x)dx$ et $\int_\alpha^2 f(x)dx$.
   b) calculer ,en fonction de α, l'aire du domaine délimité par la courbe Cf, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite x=2.

Partie B :

1) Soit h(x)=$\frac{5x}{e^x+1}$ pour tout x positive
   a) Montrer que h'(x)= 5 $\frac{f(x)}{(e^x+1)^2}$.
   b) Dresser le tableau de variation de h.
   c) Tracer $C_h$on précisera la demi tg à l'origine.

Hichem_Farharti@yahoo.fr

EX 2 :

Soit la fonction f définie sur [0 ; +∞[par :

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x\neq 0 \text{ et } f(0)=1$$

On note par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o ;i ;j) (unité 2 cm)

1)a) prouver que , pour tout réel t≥0,

$$1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1 .$$

b) En intégrant ces inégalités, établir que , pour tout x≥0

$$x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x$$

2)Soit $g(x) = \ln(1+x)-\frac{2x}{2+x}$ avec x∊[0 ;+∞[

a) Montrer que g est dérivable et calculer g'.

b) Prouver que , pour tout x≥0 $0\leq g'(x)\leq\frac{x^2}{2}$

c) En déduire que $0\leq g(x)\leq\frac{x^3}{12}$

3)a) calculer f'(x)

b) établir que , pour tout x≥0 , $g(x)\leq\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$ puis en déduire le sens de variation de f.

4)a) Déterminer la limite de f en +∞

b) Prouver que $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}=\frac{1}{2}$ puis déduire que f est dérivable en 0 et calculer f'(0), donner l'équation de la tg T au point d'abscisse 0 et présider la position de Cf par rapport à T.

5°) dresser le tableau de variation de f puis tracer C_f et T.

Hichem_Farharti@yahoo.fr

EX 3 :

A) Soit g(x)=e^x +x - 5

1) Etudier g
2) Calculer g(0) et g(2) , montrer que g(x)=0 admet sur IR une seule solution α
3) Justifier que 1,30≤α≤ 1,31 .

B) Soit la fonction f définie sur]-∞,5[par :

f(x)=ln (5-x).

1) Dresser le tableau de variation de f
2) Montrer que f(α)=α.

C) 1) Tracer Cf

Hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées (x ;y) tels que :

$$\begin{cases} \alpha \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

On notera (Δ) cette partie

1) a) Montrer que

$$\frac{x}{x-5} = 1 + \frac{5}{x-5}$$

b) Calculer

$$\int_{\alpha}^{4} \frac{x}{x-5}\, dx = 4 - 6\alpha$$

Montrer que l'aire A de la partie (Δ) est

A = - α^2 + 6 α – 4 (on pourra utiliser une intégration par parties.

Hichem_Farharti@yahoo.fr

EX 4 :

Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par

$$f(x) = e^{\frac{1}{2x}}$$

A) Etude de f

1) a) Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$; $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

b) dresser le tableau de variation de f

2) Tracer C_f

3) a) Montrer que $e^h \geq 1 + h$

b) Déduire que pour x ≻0

$$f(x) \geq 1 + \frac{1}{2x}$$

1) Soit k ≥1, on note A(k) l'aire de la partie du plan déterminée par C , son asymptote horizontale et les droites d'équations x = 1 et x = k (l'unité graphique 2 cm)

a) Exprimer A(k) sous forme intégrale

b) Démontrer que pour tout k≥1 on a : A(k)≥2 ln k

c) L'aire A(k) admet-elle une limite finie lorsque k tend vert +∞

B) Soit g(x) = f(x) – x

1) Etudier g sur]0 ; +∞[

2) a) Montrer que f(x) = x admet une solution unique α≻0

b) Etablir que $\frac{5}{4} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$.

Hichem_Farharti@yahoo.fr

EX 5 :

On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞[par :

$$f(x) = 4x + 1 - x\,e^{x}$$

on note par C sa courbe dans un repère orthonormé (unité 4 cm)

A) Etude de f

1) Calculer f' puis f '' et déduire son signe
2) Dresser le tableau de variation de f '
3) Montrer que f '(x) = 0 admet une seule solution α entre 0 ,79 et 0,8
4) Etablir le tableau de variation de f
5) Montrer que f(x) = 0 admet une solution unique β entre $\frac{3}{2}$ et 2
6) Construire C
7) a) Calculer $\int_0^u xe^x$ dx

   b) Déduire l'expression en fonction de u

$$I_u = \int_0^u f(x)dx$$

d) montrer que $e^{\beta} = \frac{4\beta+1}{\beta}$ et déduire que $I_\beta = 2\beta^2 + \beta + 2 + \frac{1}{\beta}$

e) Soit h(x)= ln (4 + $\frac{1}{x}$), montrer h(β) = β

Hichem_Farharti@yahoo.fr

EX 6 :

A) Soit g(x) = 1 + x +e^x

1) Etudier g
2) Montrer que g(x) = 0 admet une seul solution α entre -1,3 et -1,2.
3) Préciser le signe de g

B) Soit f(x) = $\frac{xe^x}{1+e^x}$, on désigne par C sa courbe dans un repère

1) a) dresser le tableau de variation de f

   b) montrer que f(α)= 1 + α

   c) montrer que D :y = x est une asymptote oblique au voisinage de +∞

   d) Ecrire l'équation de la tg T à C au pt O(0,0)

   Etudier la position de T par rapport à C

   e)Tracer C

2) soit H(x ; 0) , la parallèle à l'axe (y ; y') passant par H coupe C en M et la droite D en N

   On note K(x) = MN

   a) montrer que K(x) = $\frac{x}{1+e^x}$

   b) montrer que K'(x) =$\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ g(-x)

   c) Déduire que MN est maximale en (-α)

3) Montrer que f(-α) = 1
4) Montrer que la tg au point A de C d'abscisse (-α) est parallèle à D
5) a) Montrer que pour tout x ≥1 ; on a : $\frac{e^x}{1+e^x}$≤ f(x) ≤ x

   b) Déduire un encadrement de l'aire du plan limité par la courbe C , l'axe (x ;x') et les droites d'équation : x = 1 et x = - α

Hichem_Farharti@yahoo.fr

EX 7 :

A) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=2x+\frac{e^x}{1+e^x}$

et Cf la courbe de f dans un repère orthonormé (o ;i ;j)

1).a).Montrer que $\Omega\left(0\ ;\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de Cf

b).Vérifier que $\Omega \in$ Cf .Conclure.

c). Déterminer une équation de la tangente T à Cf au point Ω

2).Etudier f et tracer Cf .

3).Déterminer le nombre de solutions de l'équation :f(x)=m où $m\in$ IR

4).a).Soit $\alpha > 2$.Calculer $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations :x=ln(2) ;$x=\ln(\alpha)$ et la droite D :y=2x+1 et la courbe Cf

b).Calculer alors la limite de $A(\alpha)$ quand x tend vers $+\infty$

B) Soit (I_n) la suite définie sur IN^* par $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{x+1}\,dx$

1).Calculer I_1

2).Montrer que (I_n)) est décroissante

3).a).Montrer que

$$\frac{1}{1+n}\leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{1+n}$$

b).En déduire que (I_n)) est convergente et calculer sa limite.

4).a).Montrer que $\forall$ $x\in[0\ ;1]$ on a : $0\leq \sqrt{2}-\sqrt{x+1}\leq\frac{1-x}{2}$

b). Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{n+1}-\frac{1}{n^2}\leq I_n\leq\frac{\sqrt{2}}{n+1}$

c). En déduire que (I_n) est convergente et calculer sa limite .

Hichem_Farharti@yahoo.fr

EX 8 :

Soit f la fonction définie sur]0 ;+∞ [par f(x)=$\frac{x^2-1}{4}$ 2ln(x)

1).a).Dresser le tableau de variation de f

b). Montrer que l'équation f(x)=0 admet dans]0 ;+∞ [exactement deux racines dont l'une $\alpha \in [3\,;4]$

c).vérifier que $\alpha = \sqrt{1 + 8\ln(\alpha)}$

2). Soit g la fonction définie sur [3 ;+∞ [par g(x)= $\sqrt{1 + 8\ln(x)}$

a) Montrer que g(x)≥ 3et que 0≤ g (x) ≤ $\frac{4}{9}$ ∀ x∈[3 ;+∞ [

3). Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$$

a).Montrer que $U_n \geq 3$ ∀ n∈ IN

b). Montrer que $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|U_n - \alpha|$ ∀ n∈ IN

c). Montrer que $|U_n - \alpha| \leq (\frac{4}{9})^n$ ∀ n∈ IN

d). En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

e).Trouver n_0 pour que $|U_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-2}$

Hichem_Farharti@yahoo.fr

EX 9 :

A) Soit g définie sur $]0\,;+\infty[$, par :

$$g(x) = x + (x-2)\ln x$$

1) a) montrer que $g'(x) = 2\frac{x-1}{x} + \ln x$

b) déduire que :

si $x > 1$ alors $g'(x) > 0$

si $0<x<1$ alors $g'(x)<0$

2) a) Etudier les variations de g

b) en déduire que $g(x) \geq 1$

B) Soit f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)= 1 + x\ln x - (\ln x)^2$$

1) a) montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$, et étudier f

b) En déduire que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle que l'on précisera.

2) a) Ecrire une équation de la tg T au point d'abscisse 1

b) Etudier les variation de h définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$h(x)=x- 1 - \ln x$$

en déduire le signe de h

c)montrer que $f(x) - x = (\ln x - 1)h(x)$, déduire la position de la courbe C par rapport T

3) tracer Cf et Cf^{-1}

4) a) calculer :

$$I_1 = \int_1^e x\ln x\,dx \qquad \text{et} \quad I_2 = \int_1^e (\ln x)^2$$

On désigne par A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par les courbes , calculer A

Hichem_Farharti@yahoo.fr

EX 10 :

A) Soit f(x) = ln (e^{2x}+e^{-x}) définie sur]0 ; +∞[.

C sa courbe dans un repère orthonormé (unité 2 cm^2)

1) Calculer la limite de f en +∞.
2) a) montrer que pour tout x ≥0, f(x)= 2 x + ln (1+ e^{-3x}).

   b) montrer que D : y= 2x est une asymptote à C au voisinage de +∞.

3) Etudier les variations de f.

4) tracer C.

B) soit g définie sur]0 ;+∞[par g(x) = x- ln (1+x).

1) a) Etudier g.

   b) déduire le signe de g puis déduire que ln (1 + x)<x.

2) montre que $\int_0^{\alpha} \ln(1+e^{-3x})dx < \frac{1}{3}$.

3) Soit A(α) l'aire en cm^2 du domaine de plan limité par (x ;x') , la droite d'équation x=α et C et D .Montrer que A(α) est majorée.

Hichem_Farharti@yahoo.fr

EX 11 :

A) Soit la fonction f définie sur]0 ;+∞[par f(x)= $\frac{1}{x}$ +ln x.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) montrer que la courbe C admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

b) Ecrire l'équation de la tg T au point I.

3) a) calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement ce résultat.

b) Tracer C.

4) Soit α un réel strictement positive supérieur à 1 et A(α) l'aire limitée par la courbe C (x ;x') et les droites d'équations x=1 et x =α.

a) Calculer A(α).

b) Déterminer α pour que A(α)=2.

B) Soit g(x)=f(x)-x pour tout x>0

1) Montrer que g réalise une bijection de]0 ;+∞[sur IR.

2) Calculer g(1) puis pour tout x ≥1 on a f(x) ≤ x.

3) Montrer que g^{-1} est dérivable en 0 et déterminer ($(g^{-1})'$(0).

4) Soit U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que U_n ≥1.

b) Montrer que U est décroissante.

c) En déduire que U est convergente et calculer sa limite.

Hichem_Farharti@yahoo.fr

EX 12 :

A) Soit f(x) = x - $\frac{1}{e^x - 1}$

1) Dresser le tableau de variation de f.
2) a) montrer que Cf admet deux asymptotes D et D' d'équations respectives y=x et y= x +1.

   b) montrer que le point S(0 ;$\frac{1}{2}$) est un centre de symétrie de C .

3) soit g la restriction de f sur IR_+^*

a) montrer que g réalise une bijection de IR_+^* sur IR .

En déduire que g(x)= 0 admet une seule solution unique α

Entre ln2 et 1.

b) montrer que f(α)= 1+α+α^2. Ecrire l'equation de la tg T au

point d'abscisse α.

d) Tracer C , T et C' de g^{-1}.

B) 1)Calculer la mesure A(t) l'aire limitée par la courbe C , la droite D et les droites d'équations x=α et x=t

2) montrer que, lorsque t tend vers +∞,A(t) admet pour limite α+ln α.

Hichem_Farharti@yahoo.fr

EX 13 :

Partie A :

Soit f définie sur]-1 ;+∞[par f(x) = $\frac{x}{x+1}$ - 2 ln (1 + x)

1) a) dresser le tableau de variation de f.
   b) montrer que f(x)=0 admet deux solution dont l'une α entre (-0,72) et (-0,71)

2) donner le signe de f.

Partie B :

Soit g la fonction définie sur]-1 ;0[U]0,+∞[par

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$$

1) calculer la limite à droite et à gauche en 0, et en 1 et +∞.
2) Calculer g'(x)
3) Montrer que g(α)=$\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$.en déduire une valeur approchée de g(α) en prenant α=-0,715.
4) Dresser le tableau de variation de g.
5) Tracer Cg (unité 2 cm).
6) Soit β>1,on note D(a) le domaine limité par Cg , l'axe des abscisse et les droites d'équation x=1 et x=β
   a) Soit h(x)=$\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$; x>0 ; montrer que h'(x)=$\frac{1}{x}$-g(x) et en déduire une primitive de g sur]0,+∞[.
   b) Déterminer en fonction β l'aire D(β) en cm^2.
   c) Calculer $\lim_{\beta\mapsto+\infty} A(\beta)$.

Hichem_Farharti@yahoo.fr

EX 14 :

On considère les fonctions f et g sur IR par : $f(x)=xe^{-x^2}$

$g(x)=x^3e^{-x^2}$

C_1 et C_2 les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé (unité 5 cm)

1) Dresser le tableau de variation de f et g
2) Déterminer les positions relatives de f et g
3) Tracer C_1 et C_2
4) On appelle la droite D d'équation x = 1 . soit A_1 l'aire du domaine limité par la courbe C_1,les deux axes de coordonnées et la droite D et soit A_2 l'aire du domaine limité par la courbe C_2,les deux axes et la droite D.
   a) Calculer A_1 .
   b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $A_2 = -\frac{1}{2e} + A_1$.
   c) Déduire A_2 en cm^2.

Hichem_Farharti@yahoo.fr

EX 15 :

A) Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x)=x - e^{-\frac{x}{2}}$.

1) Dresser le tableau de variation de g.
2) Montrer que g(x) = 0 admet une seule solution α sur [0 ;1], justifier que α entre 0,7 et 0,71.
3) En déduire le signe de g.

B) Soit f définie sur IR par $f(x)=(2x-4)e^{\frac{x}{2}}+2-x$.

1) exprimer f' en fonction de g'.
2) a) montrer que $f(\alpha)=4-\alpha-\frac{4}{\alpha}$.

b) en déduire un encadrement de f(α) d'amplitude 0,1.

3) a) déterminer les limites de f en +∞ et -∞.

b) montrer que la droite y=2 – x est une asymptote à C_f au voisinage de -∞.

4) dresser le tableau de variation de f.

5) a) calculer les coordonnées des points d'intersection de C_f et l'axe des abscisses.

b) calculer les coordonnées de E le point d'intersection de C_f et l'axe des ordonnées.

c) donner l'équation de la tg T en E.

6) tracer C_f et T

C) 1) montrer que $F(x)=4e^{\frac{x}{2}}(x-3)+2x-\frac{1}{2}x^2$ est une primitive de f(x).

2) calculer l'aire du domaine limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisse et les droites d'équation x =0 et x = 2.

Hichem_Farharti@yahoo.fr

EX 16 :

On considère la fonction définie sur par f(x) = $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ et on note par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité 2 cm).

A) 1) montrer que f'(x) =$\frac{f(x)}{1+e^{2x}}$.

2) dresser le tableau de variation de f

3) montrer que C admet un point d'inflexion I à déterminer

4) montrer que f'(x) ≤ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

5) étudier la variation de g(x) = f(x) – x et montrer que g(x) = 0 admet une seule solution α entre ln 2 et 1

6) tracer C

B) 1) montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J à Préciser.

2) Déterminer f^{-1} (α) et $f^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$

3) montrer que f^{-1} =$\frac{1}{2}$ ln ($\frac{x^2}{1-x^2}$)

4) tracer $C_{f^{-1}}$.

Hichem_Farharti@yahoo.fr

EX 17 :

Soit f définie par $f(x)= e^{\frac{x-1}{x+1}}$ pour $x\neq-1$

et $f(-1) = 0$

1) **Etudier la continuité de f en (-1)**
2) **Etudier la dérivabilité de f en (-1)**
3) **Calculer f'**
4) **Dresser le tableau de variation de f**
5) **Construire C_f**
6) **Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}**
7) **Construire $C_{f^{-1}}$**
8) **Calculer le nombre dérivé de f^{-1} en 1**
9) **Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$**

Hichem_Farharti@yahoo.fr

EX 18 :

Soit f la fonction définie sur]-∞ ,0[par f(x)= $\sqrt{1-e^x}$ On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormée (o , i , j) (unité graphique 2 cm)

1/ a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et interpréter graphiquement ce résultat

b) Etudier les variations de f sur] -∞ ,0]

2/ a) Montrer que f réalise une bijection de] -∞ ,0] sur un intervalle J que l'on déterminera

b) Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$

3/ a) Montrer que pour tout x de [0,1 [, f (x) = ln(1- x^2)

b) Soit F (x) = (x- 1) ln(1-x) +(x + 1) ln (1+ x) - 2x pour x de [0,1 [

Montrer que F est une primitive de f^{-1} sur [0,1 [

c) vérifier que $F(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ln 2 + 2 ln (1 + $\sqrt{2}$)- $\sqrt{2}$

d) Soit A l'aire de la partie limitée par $C_{f^{-1}}$ et les droites

y = -ln2 , x= 0 et x=$\frac{\sqrt{2}}{2}$

montrer que A= (8 ln (1 + $\sqrt{2}$) - 4$\sqrt{2}$) cm^2

e) Déduire alors la valeur de l' intégrale

$$\int_{-\ln 2}^{0} \sqrt{1-e^x}$$

Hichem_Farharti@yahoo.fr