

EXERCICE 1

Montrer que les fonctions suivantes définissent une bijection de leur ensemble de définition sur un ensemble à préciser, et écrire les fonctions réciproques :

$$f_1(x) = 3x - 5 \quad ; \quad f_2(x) = \sqrt{3} - x \quad ; \quad f_3(x) = x^2 - 1 \text{ sur }]-\infty, 0] \quad ; \quad f_4(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \text{ sur } [-1, 1]$$

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivantes, montrer que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ admet une fonction réciproque f^{-1} , et calculer sa dérivée au point indiqué entre parenthèse :

1. a- $I = \mathbb{R}$ $f(x) = x^3 + 2x - 1$ ($y = 2$)

b- $I = \mathbb{R}$ $f(x) = x^5 + 3x^3 + 2x - 1$ ($y = 5$)

justifier que les équations $x^3 + 2x - 1 = 0$ et $x^5 + 3x^3 + 2x - 1 = 0$ admettent une unique solution réelle

2- a- $I = \mathbb{R}^*$ $f(x) = -2x + \frac{8}{x^3}$ ($y = -3$)

b- $I = [-1, 1]$ $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$ ($y = 1$)

EXERCICE 3

Montrer que la fonction $f: x \rightarrow \frac{x}{1+|x|}$ réalise une bijection de \mathbb{R} sur $] -1, 1[$ et donner l'expression de f^{-1}

EXERCICE 4

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x}, & x \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\} \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1- montrer que pour tout $x \in]0, \pi[$: $\sin x - x \cos x \geq 0$

2- étudier les variations de f . déduire que f réalise une bijection de $[0, \pi[$ vers $[1, +\infty[$

3- on note par g la fonction réciproque de f sur $[0, \pi[$, vérifier que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a $x \sin(g(x)) = g(x)$

4- calculer $g(1)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

5- calculer $g'(x)$ en fonction de $g(x)$

EXERCICE 5

Soit f une fonction définie sur $[-1, 1]$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1- montrer que f est continue et dérivable en 0

2- montrer que pour tout réel x de $]-1, 1[$; $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})}$

3- montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}

4- a- soit λ un réel de $]-1, 1[$. montrer que l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique x_0 de $]-1, 1[$

b- vérifier que $f\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right) = \lambda$

c- en déduire l'expression de f^{-1} pour tout x de I

5- tracer dans un même repère orthonormé les courbes \mathcal{C}_f et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$

EXERCICE 6 (unité graphique 4cm)

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- 1- **a-** étudier la dérivabilité de f à droite de 0 . interpréter graphiquement le résultat .
b- dresser le tableau de variations de f
- 2- **a-** montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera on désigne par \mathcal{C}' sa courbe représentative
b- expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$
- 3- tracer \mathcal{C} et \mathcal{C}' .

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(x) = \sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}x)}$

- 1- étudier la dérivabilité de f en 0
- 2- dresser le tableau de variations de f
- 3- **a-** montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J que l'on précisera on désigne par \mathcal{C}' sa courbe représentative
b- étudier la continuité et le sens de variations de g

4-**a-** montrer que g est dérivable sur $[0,1[$ et que pour tout $x \in [0,1[$ $g'(x) = \frac{4}{\pi} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

b- montrer que pour tout $x \in [0,1[$ $g''(x) = \frac{4}{\pi} \frac{1+x^4}{(1-x^4)\sqrt{1-x^4}}$

EXERCICE 8

1°/ Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

a- Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+ .

b- Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \frac{x}{\sqrt{x+1}} \leq x$.

c- Montrer que la fonction u définie sur $[0,1[$ par $u(x) = x - \frac{x^2}{2}$ réalise une bijection de $[0,1[$ sur $[0, \frac{1}{2}]$ et expliciter $u^{-1}(x)$ pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

2°/ Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ et \mathcal{C}_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a- Interpréter graphiquement la double inégalité démontrée en 1°/b).

b- Montrer que g réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ . On note g^{-1} la fonction réciproque de g

c- Tracer dans le même repère les courbes \mathcal{C}_g , $\mathcal{C}_{g^{-1}}$, \mathcal{C}_u et $\mathcal{C}_{u^{-1}}$.

3°/ Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $U_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $U_{n+1} = g^{-1}(U_n)$, $n \geq 0$.

a- Montrer que (U_n) est croissante.

b- Montrer que (U_n) est non majorée.

c- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

4°/ **a-** En utilisant la question 2°/c), justifier que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $x \leq g^{-1}(x) \leq 1 - \sqrt{1-2x}$.

b- En déduire la limite de la suite (V_n) définie par $V_n = ng^{-1}(\frac{1}{n})$.

EXERCICE 9

Soit la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{2 \cos x}$

1- montrer que f est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle I que l'on déterminera

2- on considère la fonction g définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \sin x - 2 \cos^2 x$

a-étudier les variations de g

b-montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. vérifier que $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$

c-en déduire le signe de $g(x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

3-Soit la fonction h définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $h(x) = f(x) - x$

a-étudier les variations de h

b-prouver que $h(\alpha) < 0$

c-en déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions r et r' tels-que

$$\frac{\pi}{6} < r < \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{3} < r' < \frac{5\pi}{12}$$

d-interpréter graphiquement les résultats

e-tracer \mathcal{C}_f et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ dans un même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

EXERCICE 10

On considère la fonction g définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$

1- justifier la dérivabilité de g sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et montrer que $g'(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$

2- déduire que g est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera

3- montrer que g^{-1} est dérivable sur J , et que $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$

4- pour $x \in J$, on pose $\varphi(x) = g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

a- montrer que φ est dérivable sur J et calculer $\varphi'(x)$

b- en déduire que pour $x \in J$, $g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = -g^{-1}(x)$

EXERCICE 11

Soit n un entier naturel non nul et soit f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_n(x) = x^3 + 3x + 1$

1- a- dresser le tableau de variations de f_n

b-montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . on pose h sa réciproque

c- étudier la continuité et le sens de variations de h

d- montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha_n \in]-1, 0[$

2- a- montrer que pour tout réel x de $] -1, 0[$ et pour n de \mathbb{N}^* : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

b- montrer que la suite (α_n) est croissante et qu'elle est convergente

c- montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* : $\alpha_n = \frac{-1}{\alpha_n^2 + 3n}$

d- en déduire que $\frac{-1}{3n} < \alpha_n < \frac{-1}{3n+1}$. calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

3- tracer \mathcal{C}_{f_1} et $\mathcal{C}_{f_1^{-1}}$; \mathcal{C}_{f_2} et $\mathcal{C}_{f_2^{-1}}$

EXERCICE 12

- 1- Vérifier que chacune des fonctions suivantes est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J à déterminer
- 2- Tracer dans le même repère la fonction réciproque de chaque fonction en précisant le domaine de dérivabilité de chaque fonction réciproque

