Série d'exercices

Les nombres complexes

Exercice 1

Soit l'équation (E) : $z^4 + 4iz^2 + 12(1+i)z - 45 = 0$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire z_2 .On note z_3 et z_4 les autres solutions.

2) Le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient A,B,C et D les points d'affixes respectives z_1, z_2 , z_3 et z_4 Quelle est la nature du quadrilatère de sommets A,B,C et D

Exercice 2

1) Soit θ réel de $[0,2\pi[$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 4z^4 + 4\cos\theta(1+\cos\theta)z^2 + (1+\cos\theta)^2 = 0$.

2)Mettre P(z) sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels

Exercice 3

Soit le nombre complexe a = $e^{i\frac{2\pi}{5}}$

1) Vérifier que $a^5 = 1$

2) Vérifier que $z^5 - 1 = (z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4)$

3) En déduire que $1+a+a^2+a^3+a^4=0$

4) Montrer que $a^3 = (\bar{a})^2$ et $a^4 = \bar{a}$

5) En déduire que $(a+\bar{a})^2 + a + \bar{a} - 1 = 0$

6) Calculer $a+\bar{a}$ et en déduire $\cos\frac{2\pi}{5}$

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les point A et B d'affixes i et –i , Soit f l'application de P'=P\{A} dans P qui a tout point M de P' d'affixe z distinct de $-i$ associe le point M'

d'affixe z' tel que $z' = \frac{1+iz}{z+i}$

1) Déterminer le point f(O).

2) Soit C d'affixe 1+i , déterminer l'antécédent de C

3) Montrer que $z = \frac{1+iz}{z+i}$ admet deux solutions

4) Montrer que $OM' = \frac{AM}{BM}$ et $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}}) + \frac{\pi}{2}(2\pi)$

5) Montrer que les images par f des points de la droite d'équation y = 0 sont situées sur un même cercle (C) que l'on précisera

6) Soit M un point du cercle de diamètre [AB] différent de A et B, montrer que f(M) appartient à l'axe des abscisses

Exercice 5

Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^3 - 2(3+i)z^2 + (8+9i)z + 3 - 9i = 0$

1) Montrer que l'équation(E) admet une racine réelle α que l'on déterminera

puis calculer les deux autres racines z_1 et z_2 avec $|z_1| > |z_2|$.

2) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives α, z_1 et z_2 dans le plan P le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Montrer que le quadrilatère OABC est un rectangle.

Exercice 6

Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^3 + 2(1-i)z^2 + (1+m^2-4i)z - 2i(1+m^2) = 0$

où m est un paramètre réel.

1) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera et calculer en fonction de m les deux autres solutions.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, soient les points A, B,M' et M'' d'affixes respectives : 2i, −2 −2i , −1−im et −1+im.

a) Montrer que le quadrilatère AM'BM'' est un parallélogramme.

b) Déterminer m pour que le quadrilatère AM'BM'' soit un rectangle.

Correction

Exercice 1

1) (E) admet une solution réelle z_1= a , $a \in IR \Leftrightarrow a^4 + 4ia^2 + 12(1+i)a - 45 = 0$

$$\Leftrightarrow (a^4 + 12a - 45) + i(4a^2 + 12a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + 12a - 45 = 0 \quad (1) \\ 4a^2 + 12a = 0 \quad (2) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow$ a = 0 ou a = −3 ; 0 n'est pas une solution de (1) et −3 est une solution de (1) donc a = −3 et z_1 = −3

(E) admet une solution imaginaire pur z_2=ib , $b \in IR \Leftrightarrow$

$$(ib)^4 + 4i(ib)^2 + 12(1+i)(ib) - 45 = 0 \Leftrightarrow (b^4 - 12b - 45) + i(-4b^2 + 12b) = 0$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 12b - 45 = 0 \quad (1) \\ -4b^2 + 12b = 0 \quad (2) \end{cases}$ (2) $\Leftrightarrow$ b = 0 ou b = 3 ; 0 n'est pas une solution de (1) et 3 est une solution de (1) donc b = 3 et z_2 = 3i

$z^4 + 4iz^2 + 12(1+i)z - 45 = (z+3)(z-3i)(az^2 + bz + c) = = (z^2 + (3-3i)z - 9i)(az^2 + bz + c)$ d'où a = 1 et c = −5i les termes en z^2 sont $-5iz^2 + b(3-3i)z^2 - 9iz^2 = (-5i + b(3-3i) - 9i)z^2$ et par identification on obtient b = 3i – 3 alors (E) $\Leftrightarrow$

$$(z+3)(z-3i)(z^2 + (3i-3)z - 5i) = 0$$

$z^2 + (3i-3)z - 5i = 0$ a pour discriminant 2i = $(1+i)^2$, on obtient alors deux solutions z_3 = 1 – 2i et z_4 = 2 – i alors

$$S_{\mathbb{C}} = \{-3, 3i, 1-2i, 2-i\}$$

2) On a A(−3,0) ; B(0,3) ; C(1,−2) et D(2,−1) d'où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et on a $AD = BC = \sqrt{26}$ d'où ABCD est un trapèze isocèle.

Exercice 2

1) $4z^4 + 4\cos\theta(1+\cos\theta)z^2 + (1+\cos\theta)^2 = 0$

Posons $x = z^2$ alors $P(z) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4\cos\theta(1+\cos\theta)x + (1+\cos\theta)^2 = 0$

$\Delta' = 4\cos^2\theta(1+\cos\theta)^2 - 4(1+\cos\theta)^2 = 4(1+\cos\theta)^2(\cos^2\theta - 1) = -4(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta = (i\ 2(1+\cos\theta)\sin\theta)^2$ d'où

$x_1 = \dfrac{-2\cos\theta(1+\cos\theta) - i\ 2(1+\cos\theta)\sin\theta}{4} = -\dfrac{1}{2}(1+\cos\theta)(\cos\theta + i\ \sin\theta)$ et

$x_2 = \dfrac{-2\cos\theta(1+\cos\theta) + i\ 2(1+\cos\theta)\sin\theta}{4} = -\dfrac{1}{2}(1+\cos\theta)(\cos\theta - i\ \sin\theta)$

alors $z^2 = -\dfrac{1}{2}(1+\cos\theta)e^{i\theta} = \dfrac{1}{2}(1+\cos\theta)e^{i(\theta+\pi)}$ ou

$z^2 = -\dfrac{1}{2}(1+\cos\theta)e^{-i\theta} = \dfrac{1}{2}(1+\cos\theta)e^{-i(\theta+\pi)}$

or $\theta \in [0,2\pi[$ alors $1 + \cos\theta \in [0,2]$ donc en posant $\lambda = \dfrac{1+\cos\theta}{2}$

P(z) = 0 admet 4 solutions $z_1 = \sqrt{\lambda}e^{i(\frac{\theta+\pi}{2})}$, $z_2 = -\sqrt{\lambda}e^{i(\frac{\theta+\pi}{2})}$

$z_3 = \sqrt{\lambda}e^{-i(\frac{\theta+\pi}{2})}$ et $z_4 = -\sqrt{\lambda}e^{-i(\frac{\theta+\pi}{2})}$ d'où $S = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$

2) On remarque $z_3 = \overline{z_1}$ et $z_2 = \overline{z_4}$ donc

$P(z) = (z - z_1)(z - z_3)(z - z_2)(z - z_4)$

$(z - z_1)(z - z_3) = (z - \sqrt{\lambda}e^{i(\frac{\theta+\pi}{2})})(z - \sqrt{\lambda}e^{-i(\frac{\theta+\pi}{2})}) = z^2 - 2\sqrt{\lambda}\cos(\frac{\theta+\pi}{2})z + \lambda$

$(z - z_2)(z - z_4) = (z + \sqrt{\lambda}e^{i(\frac{\theta+\pi}{2})})(z + \sqrt{\lambda}e^{-i(\frac{\theta+\pi}{2})}) = z^2 + 2\sqrt{\lambda}\cos(\frac{\theta+\pi}{2})z + \lambda$

D'où $P(z) = (z^2 - 2\sqrt{\lambda}\cos(\frac{\theta+\pi}{2})z + \lambda)(z^2 + 2\sqrt{\lambda}\cos(\frac{\theta+\pi}{2})z + \lambda)$

c'est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels

Exercice 3

1) $a^5 = (e^{i\frac{2\pi}{5}})^5 = e^{i2\pi} = 1$

2) $(z - 1)(1+z+z^2+z^3+z^4) = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 - 1 - z - z^2 - z^3 - z^4 = z^5 - 1$

3) $a^5 = 1 \Leftrightarrow$) $a^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(1+a+a^2+a^3+a^4) = 0 \Leftrightarrow$

$1+a+a^2+a^3+a^4 = 0$ car $a \neq 1$

4) $a^3 = (e^{i\frac{2\pi}{5}})^3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}$; $(\overline{a})^2 = (e^{-i\frac{2\pi}{5}})^2 = e^{-i\frac{4\pi}{5}}$ et comme $\dfrac{6\pi}{5} = 2\pi - \dfrac{4\pi}{5}$

alors $e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{-i\frac{4\pi}{5}}$ donc $a^3 = (\overline{a})^2$

$a^4 = (e^{i\frac{2\pi}{5}})^4 = e^{i\frac{8\pi}{5}}$; $\overline{a} = e^{-i\frac{2\pi}{5}} = e^{-i(\frac{2\pi}{5}+2\pi)} = e^{i\frac{8\pi}{5}}$ d'où $a^4 = \overline{a}$

5) $(a+\bar{a})^2+a+\bar{a}-1=a^2+2a\bar{a}+(\bar{a})^2+a+\bar{a}-1=a^2+a^3+a+a^4+1=0$

($a\bar{a}=|a|=1$)

6) $a+\bar{a}=2\Re(a)=2\cos\frac{2\pi}{5}$ d'après 5) $(a+\bar{a})^2+a+\bar{a}-1=0$ alors

$\cos^2\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}-1=0$ d'où $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de $4x^2+2x-1=0$

qui admet deux solutions $x'=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $x''=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

et comme $\cos\frac{2\pi}{5}>0$ alors $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Exercice 4

1) On a pour affixe 0 alors son image a pour affixe $z'=\frac{1+i\times 0}{0+i}=\frac{1}{i}=-i$

donc f(O) = B

2) C a pour affixe 1+i alors son antécédent est le nombre complexe z tel que $1+i=\frac{1+iz}{z+i}\Leftrightarrow(1+i)(z+i)=1+iz\Leftrightarrow z=2-i$

donc l'antécédent de C est le point d'affixe 2 – i

3) $z=\frac{1+iz}{z+i}\Leftrightarrow z(z+i)=1+iz\Leftrightarrow z^2=1\Leftrightarrow z=1$ ou $z=-1$

4) On a $z'=\frac{1+iz}{z+i}=\frac{i(-i+z)}{z+i}=\frac{i(z-i)}{z+i}$ alors $|z'|=\frac{|i||z-i|}{|z+i|}\Leftrightarrow|z'|=\frac{|z-i|}{|z+i|}\Leftrightarrow OM'=\frac{AM}{BM}$

$z'=\frac{i(z-i)}{z+i}$ alors $\arg(z')\equiv\arg(i)+\arg(z-i)-\arg(z+i)(2\pi)$ donc

$(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}})\equiv\frac{\pi}{2}+(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}})-(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}})(2\pi)\equiv\frac{\pi}{2}+(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}})+(\widehat{\overrightarrow{BM},\vec{u}})(2\pi)\Leftrightarrow$

$(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}})\equiv\frac{\pi}{2}+(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}})(2\pi)\equiv\frac{\pi}{2}+(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}})(2\pi)$

5) Soit M un point de la droite d'équation y = 0 alors M $\in$ $(O,\vec{u})$ et puisque A et B ont pour affixes i et –i alors $(O,\vec{u})$ est la médiatrice de [AB] et par conséquent MA = MB d' où $OM'=\frac{AM}{BM}=1\Leftrightarrow M'\in\zeta(O,1)$

Les images par f des points de la droites des abscisses sont les points du cercle trigonométrique

6) Soit M un point du cercle de diamètre [AB] différent de A et B alors

$(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}})\equiv\frac{\pi}{2}(\pi)$ donc $(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}})+\frac{\pi}{2}\equiv 0(\pi)$ d'où d'après (4) $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}})\equiv 0(\pi)$ et par suite M' $\in$ $(O,\vec{u})$

Exercice 5

1) $z^3-2(3+i)z^2+(8+9i)z+3-9i=0$ α est une solution réelle de (E) $\Leftrightarrow$

$\alpha^3-2(3+i)\alpha^2+(8+9i)\alpha+3-9i=0\Leftrightarrow$

$(\alpha^3-6\alpha^2+8\alpha+3)+i(-2\alpha^2+9\alpha-9)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha^3-6\alpha^2+8\alpha+3=0 & (1)\\ -2\alpha^2+9\alpha-9=0\end{cases}$

$-2\alpha^2 + 9\alpha - 9 = 0$ a pour solution 3 et $-\frac{3}{2}$ or seulement 3 est solution de l'équation (1) donc $\alpha = 3$ est solution de l'équation (E) et par suite (E)$\Leftrightarrow$

$(z - 3)(z^2 + bz - 1 + 3i) = 0 \Leftrightarrow z^3 + (b - 3)z^2 + (-1 + 3i - 3b)z + 3 - 9i = 0$

par identification $b - 3 = -2(3+i) \Leftrightarrow b = -3 - 2i$ et $-1 + 3i - 3(-3 - 2i) = 8 + 9i$

d'où (E)$\Leftrightarrow (z - 3)(z^2 + (-3 - 2i)z - 1 + 3i) = 0 \Leftrightarrow z = 3$ ou

$z^2 + (-3 - 2i)z - 1 + 3i = 0$; $\Delta = 9$, $z' = i$ et $z'' = 3+I$

on a $|z''| > |z'|$ alors $z_1 = z'' = 3 + i$ et $z_2 = z' = i$

2) A, B et C les points d'affixes respectives α, z_1 et z_2 alors $z_{\overrightarrow{OA}} = z_A = 3$; $z_{\overrightarrow{CB}} = z_B - z_C = z_1 - z_2 = 3$ alors

$z_{\overrightarrow{OA}} = z_{\overrightarrow{CB}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ donc OABC est un parallélogramme or $OB = |z_B| = |3 + i| = \sqrt{10}$

$AC = |z_A - z_C| = |3 - i| = \sqrt{10}$ alors OB =AC donc OABC est un parallélogramme dont les diagonales sont isométriques d'où c'est un rectangle

Exercice 6

$z^3 + 2(1 - i)z^2 + (1 + m^2 - 4i)z - 2i(1 + m^2) = 0$

$z_0 = i\alpha$ est une solution imaginaire de (E) $\Leftrightarrow$

$(i\alpha)^3 + 2(1 - i)(i\alpha)^2 + (1 + m^2 - 4i)(i\alpha) - 2i(1 + m^2) = 0 \Leftrightarrow (-2\alpha^2 + 4\alpha) + i(-\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha + m^2\alpha - 2 - 2m^2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -2\alpha^2 + 4\alpha = 0 & (1) \\ -\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha + m^2\alpha - 2 - 2m^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1)$\Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\alpha = 2$; 0 n'est pas solution de (2) et 2 est une solution donc $\alpha=2$ et par suite $z_0 = 2i$ est une solution imaginaire de (E) alors (E) $\Leftrightarrow$

$(z - 2i)(z^2 + bz + 1+m^2) = z^3 + (b - 2i)z^2 + (1 + m^2 - 2ib)z - 2i(1 + m^2)$

Par identification $b = 2$ d'où (E) $\Leftrightarrow (z - 2i)(z^2 + 2z + 1+m^2) = 0 \Leftrightarrow$

$z = 2i$ ou $z^2 + 2z + 1+m^2 = 0$, $\Delta' = -m^2 = (im)^2$ alors $z' = -1-im$ et

$z'' = -1+im$

2) a) A, B,M' et M'' d'affixes respectives : $2i$, $-2 -2i$; $-1-im$ et $-1+im$

$z_{\overrightarrow{AM'}} = z_{M'} - z_A = -1 - im - 2i$, $z_{\overrightarrow{M''B}} = z_B - z_{M''} = -1 - im - 2i$

$z_{\overrightarrow{AM'}} = z_{\overrightarrow{M''B}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{M''B}$ donc AM'BM'' est un parallélogramme

b) Pour que le parallélogramme AM'BM'' soit un rectangle il faut que ses diagonales soient isométriques $\Leftrightarrow$ AB = M'M'' $\Leftrightarrow$

$|z_B - z_A| = |z_{M''} - z_{M'}| \Leftrightarrow |-2 - 4i| = |2im| \Leftrightarrow \sqrt{20} = 2|m| \Leftrightarrow |m| = \sqrt{5}$

$m = \sqrt{5}$ ou $m = -\sqrt{5}$