Fonctions logarithme et exponentielle

EXERCICE 1

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^4}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2 + 1 - \ln x)$ $\qquad \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$ $\qquad \lim\limits_{x\to0} x(1+\ln x)$

EXERCICE 2

Calculer les limites suivantes :

a- $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - 2x + 1).\ln(x)$ b- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) - \ln(x^3+1)$

c- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^3+x-1}{x^2+4}\right)$ d- $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(\ln(-x))$

e- $\lim\limits_{x\to0^+} (x^2 - 2x).\ln x$ f- $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+3x)}{2x}$

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left[\dfrac{x+2}{x-4}\right]$.

1) Déterminer l'ensemble de définition E de f.
2) Dresser le tableau des variations de f.
3) Tracer la courbe de f ainsi que ses asymptotes dans un repère orthonormé.

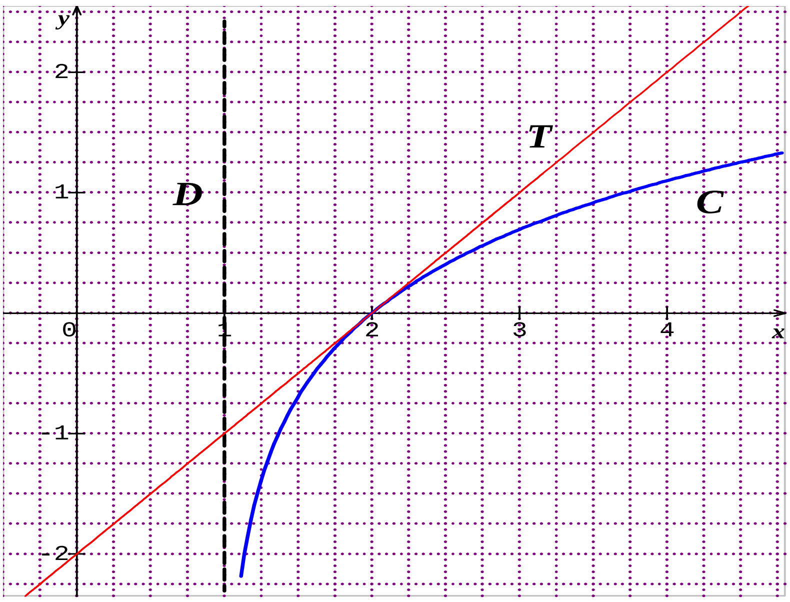
EXERCICE 4

Soit la fonction définie pour $x > 1$ par $f(x) = \dfrac{x}{2} + \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

On note C sa courbe dans un repère orthonormé.
1) Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f .
2) Etudier les variations de f.
3) Démontrer que la droite D d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote oblique à C en $+\infty$.
4) Etudier la position relative de C et D.
5) Tracer C ainsi que ses asymptotes.

EXERCICE 5

Dans la figure ci-dessus on donne : C est la courbe d'une fonction f définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$ ainsi que les droites (T) tangente à C au point de coordonnées (2 , 0) et D est une asymptote à la courbe C.



1) Déterminer graphiquement :
   a) f (2).
   b) f '(2)
   c) Le signe de la fonction f sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

Prof. : BERREZIG Abderrazek

2) On définit les fonctions f_1, f_2, et f_3 sur l'intervalle $]1\,,\ +\infty[$ par :

$f_1(x)=1-\dfrac{1}{1-x}$; $f_2(x)=1-\dfrac{1}{x^2-x}$; $f_3(x)=\ln(x-1)$.

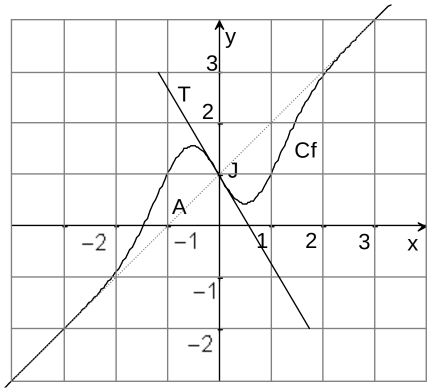
L'une d'elles est la fonction f que l'on se propose d'identifier en utilisant les résultats de la première question.

a) Calculer $f_1(2)$, $f_2(2)$ et $f_3(2)$. Ces résultats permettent-ils d'éliminer une des trois fonctions ?

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x)$. Quelle fonction peut-on éliminer ?

c) Conclure.

EXERCICE 5



La courbe ci-contre est celle d'une fonction f vérifiant : f est définie et dérivable sur IR

le point J est un centre de symétrie de C_f

la droite (AJ) est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

la droite T ; y = (1 – e)x +1 est tangente à C_f en J

1) a) Montrer qu'il existe une fonction φ définie sur IR ,admettant 0 pour limite en + ∞ et en $-\infty$ telle que f(x) = x+1+φ(x)

b) Montrer que, pour tout x de IR f(x) +f(– x) = 2

c) en déduire que φ est impaire

d) sachant que $\varphi(x) = (ax + b)\ e^{-x^2}$, déterminer l'expression de f(x)

2) a) vérifier que $f'(x)=1+(2x^2-1)e^{-x^2+1}$

b) Etudier le sens de variation de f ' sur $[0,+\infty[$ et dresser son tableau de variations

c) Montrer que l'équation f '(x) = 0 admet une seule solution α dans $[0,+\infty[$ et que $0{,}51 \le \alpha \le 0{,}52$

d) En déduire les variations de f

e) Exprimer le minimum de f sur $[0,+\infty[$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes en α

Exercice 6 :

A) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$.

1) Calculer f '(x), étudier son signe et en déduire le tableau de variation de la fonction f.

2) Calculer f(0). Montrer que l'équation f(x) = 0 admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α, appartient à $[-0{,}72\,;-0{,}71]$.

3) Donner le signe de f(x), pour $x \in]-1\,;+\infty[$.

B) Soit g la fonction définie sur l'ensemble $D =]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$

par : $g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$.

1) a) Calculer les limites de g(x) quand *x* tend vers 0 par valeurs inférieures et quand *x* tend vers 0 par valeurs supérieures.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) a)Calculer g '(x)

b) Montrer que $g(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de g(α) en prenant $\alpha \approx -0{,}715$.

3) a) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

b) Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthogonal(2cm sur (Ox) ,1cm sur (OJ))

4) Soit h la fonction définie sur D par : $h(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}-\dfrac{1}{x(x+1)}$.

a) Déterminer des fonctions u et v telles que $h(x)=u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$ et en déduire une primitive de h.

b) Déterminer une primitive de $\dfrac{1}{x(x+1)}$.

c) Déduire des questions précédentes, une primitive de g.

Prof. : BERREZIG Abderrazek