PRIMITIVES D'UNE FONCTION

I) Exercices de révision sur les fonctions dérivées :

1) Déterminer D_f , $D_{f'}$, puis f' la fonction dérivée des fonctions:

a) i) $f(x) = (2x - 3)^5$ ii) $f(x) = (2x - 3)^{-5}$ iii) $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$ iv) $f(x) = \dfrac{1}{(2x-3)^2}$

b) i) $f(x) = (3x^2 - 2x)^3$ ii) $f(x) = (3x^2 - 2x)^{-3}$ iii) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2-2x}$ iv) $f(x) = \dfrac{7}{(3x^2-2x)^2}$

c) i) $f(x) = \sin^2 x$ ii) $f(x) = \cos^2(2x - 5)$ iii) $f(x) = -\dfrac{2}{\cos^3(2x-1)}$

d) i) $f(x) = (3x-1)^{\frac{5}{2}}$ ii) $f(x) = 7\left(x^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}$ iii) $f(x) = \sqrt{3x-1}$ iv) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x-1}}$

v) $f(x) = -3\sqrt{-x^2+x}$ vi) $f(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{-x^2+x}}$ vii) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$

2) Déterminer D_f , $D_{f'}$, puis f' la fonction dérivée des fonctions:

i) $f(x) = \cos(2x - 3)$ ii) $f(x) = 3\sin(2x^2 + 3x - 1)$ iii) $f(x) = \sin(\sqrt{x}\,)$ iv) $f(x) = \dfrac{1}{3}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

3) Déterminer D_f , $D_{f'}$, puis f' la fonction dérivée des fonctions:

a) i) $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + 3\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$ ii) $f(x) = x^2 - 3x + 1 - 3\sqrt{x^2-4}$ iii) $f(x) = \cos^2\sqrt{x} - \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$

b) i) $f(x) = x.\sin(-2x + 1)$ ii) $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{\dfrac{x}{3}-1}$ iii) $f(x) = \sin^2 x \,.\, \cos x$ iv) $f(x) = \cos^2(2x - 5).\sqrt{x}$

c) i) $f(x) = \dfrac{(2x-3)^2}{(x^2+x+1)^3}$ ii) $f(x) = \dfrac{\sin(2x-3)}{(x+1)^2}$ iii) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{(x-3)^3}$

4) Dresser le tableau de variation des fonctions:

i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$ ii) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x}$ iii) $f(x) = \dfrac{2x^2-4x+1}{x^2-2x-8}$

iv) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$ v) $f(x) = (x-1)^3 + \dfrac{3}{x+1}$

II) Primitives: exemples et définition :

1) Exemples:

a) La fonction: f: $x \mapsto x$ définie sur , est la dérivée de la fonction: F: $x \mapsto$ définie sur
On dit que F est une primitive de f sur l'intervalle

b) La fonction: g: $x \mapsto -3$ définie sur , est la dérivée de la fonction: G: $x \mapsto$ définie sur
On dit que G est une primitive de g sur l'intervalle

c) La fonction: h: $x \mapsto x^2 - x + 1$ définie sur , est la dérivée de la fonction: H: $x \mapsto$ définie sur
On dit que H est une primitive de h sur l'intervalle

d) La fonction: j: $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ définie sur , est la dérivée de la fonction: J: $x \mapsto$ définie sur
On dit que J est une primitive de j sur l'intervalle

e) La fonction: k: $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ définie sur , est la dérivée de la fonction: K: $x \mapsto$ définie sur
On dit que K est une primitive de k sur l'intervalle

2) Définition: f et F sont deux fonctions définies sur un intervalle I
Si F est dérivable sur I , et que
Alors F est (et réciproquement)

3) Exercices: Déterminer une primitive F des fonctions f suivant un intervalle à préciser:

i) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ii) $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}$ iii) $f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$;

iv) $f(x) = \cos x$ v) $f(x) = \sin x$ vi) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$ vii) $f(x) = x.\cos x^2$

III) Propriétés: I est un intervalle de **R**

1) Rappel: Démontrer:
f est une fonction constante sur I $\Leftrightarrow$ la fonction dérivée de f sur I est la fonction nulle
($k \in \mathbf{R}$) $\forall x \in I \quad f(x) = k \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) = 0$

2) Primitives d'une même fonction sur un intervalle I :

F_1 et F_2 sont deux primitives d'une même fonction sur I $\Leftrightarrow \forall x \in I$, $F_1'(x) - F_2'(x) =$ =
$\Leftrightarrow \forall x \in I \quad (F_1 - F_2)'(x) =$
$\Leftrightarrow F_1 - F_2$ est une fonction
$\Leftrightarrow$

On retiendra: Si F_1 est une primitive de f sur I
Alors toutes les autres primitives de f sur I sont les fonctions F définies sur I par:
$F : x \mapsto$ ($k \in \mathbf{R}$)

3) F_1 est une primitive de f sur I ; $(x_0 \in I)$ $(y_0 \in \mathbf{R})$
Existe-t-il une primitive F_2 de f sur I telle que: $F_2(x_0) = y_0$ (« F_2 prend la valeur y_0 en x_0 ») ?

$F_2(x) =$ et donc:

On retiendra: Si f admet des primitives sur I ; $(\forall x_0 \in I)$ $(\forall y_0 \in \mathbf{R})$
Alors il existe une et une seule primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$

4) Exercices: 1) Déterminer la primitive de $f(x) = 2x-3$, qui prend la valeur 0 lorsque $x = -1$
(« qui s'annule pour $x = -1$ »)

2) Déterminer la primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \cos x$, qui prend la valeur 1 lorsque $x = \pi$

5) Tableaux des primitives :

a) Fonctions usuelles: (voir formulaire)

b) Compléments: U (resp. V) est une primitive de u (resp. v) sur I

f(x)	F(x)		f(x)	F(x)
$(\alpha \in \mathbf{R})$ $\alpha.u(x)$			$(n \in \mathbf{Z}-\{-1\})$ $u'(x).u^n(x)$	
$u(x)+v(x)$			$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	
$(a\neq 0)$ $v(ax+b)$			$(r \in \mathbf{Z}-\{-1\})$ $u'(x).u^r(x)$	
$\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$			$(u'ov)(x).v'(x)$	

6) Exercices: 1) Déterminer une fonction polynôme P , dont la fonction dérivée est: $P'(x) = x^2 - 5x + 6$
dont le maximum relatif est le double du minimum relatif

2)a) Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x^2 + x + 1)^2}$

b) Vérifier que f admet une primitive de la forme: $x \mapsto \dfrac{ax + b}{x^2 + x + 1}$

c) Déterminer toutes les primitives de f sur $\mathbf{R}$

3)a) Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivation, puis la fonction dérivée de $f(x) = (x + 4)\sqrt{x + 4}$

b) Déterminer toutes les primitives de $g(x) = \sqrt{x + 4}$ sur $]-4;+\infty[$

4)a) Déterminer les primitives de: $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$

b) Déterminer les primitives de: $f(x) = \dfrac{1}{2}(3x - 1)^3 - \dfrac{1}{2(2x - 1)^2} + \dfrac{3}{\sqrt{1 - 4x}}$ sur $\left]-\infty;\dfrac{1}{4}\right[$

5) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2}$

a) Déterminer les réels a ; b et c tels que: $\forall x \in D_f \quad f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x+1)^2}$

b) Déterminer la primitive de f sur $]-1;+\infty[$, qui prend la valeur 1 pour $x = 0$

6) $f(x) = \dfrac{4x-1}{(2x+1)^3}$

a) Déterminer les réels a ; b tels que: $\forall x \in D_f \quad f(x) = \dfrac{a}{(2x+1)^2} + \dfrac{b}{(2x+1)^3}$

b) Déterminer toutes les primitives de f sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

7) $f(x) = \dfrac{27x^3 - 27x^2 + 9x - 1}{(3x-1)^3}$

a) Déterminer les réels a ; b et c tels que: $\forall x \in D_f \quad f(x) = a + \dfrac{b}{(3x-1)^2} + \dfrac{c}{(3x-1)^3}$

b) Déterminer toutes les primitives de f sur $\left]\dfrac{1}{3};+\infty\right[$

IV) Détermination de primitives « par parties » :

1) Exemple: (x.sinx)' = + x.cosx

donc: x.cosx = (x.sinx)' -
donc: x.cosx = (x.sinx -)'
donc: est une primitive de x.sinx

2) Principe général : u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I

a) (u.v)' =

donc: u'.v =
donc: u'.v = (u.v)' - (Prim(u.v'))'
donc: u'.v = (u.v - (Prim(u.v'))'
donc: Prim(u'.v) =

On retiendra: Prim(u'v) = uv - Prim(uv')

b) Exercice: Déterminer par parties une primitive des fonctions:

i) $f(x) = x.\cos x$ ii) $f(x) = (x + 1)\sin x$ iii) $f(x) = (- x + 1).\cos(2x)$

iv) $f(x) = x^2.\sin x$ v) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-2}}$ iv) $f(x) = (x - 1)\cdot\sqrt{2x+1}$

vii) $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$ viii) $f(x) = \dfrac{3x}{(2x-1)^3}$