ATSM

Association Tunisienne des Sciences Mathématiques

Forum du bac Math

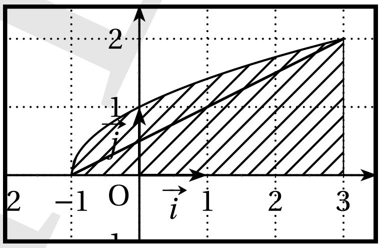
Sousse : 22-23 Mars 2010

Thème : Intégrales

Exercice 1:

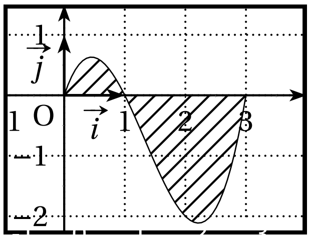
Cocher la réponse exacte.

1. D'après la représentation graphique ci-contre, l'aire de la partie limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$ est :



☐ 3 ☐ 8. ☐ 5,33.

2. D'après la représentation graphique ci-contre, l'intégrale $I = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ est :



☐ $I > 0$ ☐ $I < 0$ ☐ $I = 0$.

3. Soit $I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$, alors I est égale à :

☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ 2 ☐ $\dfrac{\pi}{4}$.

4. Soit $I = \int_1^{\sqrt{2}} 2t(t^2-1)^{2009}\,\mathrm{d}t$, alors I est égale à :

☐ $\dfrac{1}{2010}$ ☐ $\sqrt{2}^{2009}$ ☐ 2.

5. Soit $I = \int_{10\pi}^{12\pi} \cos^3 t \sin^5 t\,\mathrm{d}t$, alors I est égale à :

☐ -1 ☐ 8 ☐ $\int_0^{2\pi} \cos^3 t \sin^5 t\,\mathrm{d}t$.

6. Soit $x \in]0,1[$ et $f(x) = \int_x^{x^2} \dfrac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$, alors $\forall x \in]0,1[$, on a :

☐ $f(x) > 0$ ☐ $f(x) < 0$ ☐ $f(x) = 0$.

7. La valeur moyenne de la fonction $t \longmapsto t^9$ sur $[-1,1]$ est :

☐ $\dfrac{2}{10}$ ☐ $\dfrac{1}{10}$ ☐ 0.

Exercice 2:

Soit $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x\,\mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\pi} e^x \cos x\,\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que $I = -J$ puis $J = I - 1 - e^{\pi}$.

2. En déduire les valeurs de I et J.
3. Calculer $K=\int_0^{\pi} e^x\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$

Exercice 3:

1. (a) Déterminer les réels a et b , tels que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$ on a : $\frac{x-2}{(x-3)^2}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{(x-3)^2}$.

   (b) Calculer $I=\int_1^2\frac{x-2}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x$

2. Calculer les intégrales suivantes $J=\int_0^{Log2}\frac{e^{2x}-2e^x}{(e^x-3)^2}\,\mathrm{d}x$; $K=\int_e^{e^2}\frac{\ln x-2}{x(\ln x-3)^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4:

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\cos(n\pi)=(-1)^n$ et que $\sin(n\pi)=0$.
2. A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que : $I_n=\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{1+n^2}$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel $|I_n|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{1+n^2}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

Exercice 5:

On pose, pour tout entier naturel n : $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^{2n+1}x}$ et $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos^{2n+1}x}\,\mathrm{d}x$.

1. (a) Justifier l'existence de I_n.

   (b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $I_n-I_{n-1}=J_n$. En déduire le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Déterminer a et b pour que : $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$: $\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1+\sin x}+\frac{b\cos x}{1-\sin x}$. En déduire le calcul de I_0.

3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n=\frac{2^n}{\sqrt{2}}-(2n-1)J_n$.

   (On pourra remarquer que $\frac{1}{\cos^{2n+1}x}=\frac{1}{\cos^2 x}\times\frac{1}{\cos^{2n-1}x}$).

   (b) Déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $2nI_n=(2n-1)I_{n-1}+\frac{2^n}{\sqrt{2}}$.

   (c) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_n\geqslant\frac{2^{n-1}}{\sqrt{2}n}$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

Exercice 6:

On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

On donne le tableau de ses variations ci-contre. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	1

1. (a) Interpréter graphiquement $g(2)$.

   (b) Montrer que $0\leqslant g(2)\leqslant 2,5$.

2. (a) Soit x un réel supérieur à 2.
   Montrer que $\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant x-2$. En déduire que $g(x) \geqslant x-2$.
   (b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

3. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$. On admet dans la suite que pour tout réel t, $f(t) = (t-1)\mathrm{e}^{-t}+1$.

4. (a) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer en fonction du réel x l'intégrale $\int_0^x (t-1)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   (b) En déduire que pour tout réel x, $g(x) = x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$.
   (c) Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

Exercice 7:

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]\,0,+\infty[$ par : $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
On désigne par Γ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$

1. (a) Justifier la dérivabilité de f sur $]\,0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.
   (b) En déduire le sens de variations de f sur $]\,0,+\infty[$.

2. (a) Pour $x>0$, calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$
   (b) Montrer que pour tout $x>1$, $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right) \leqslant f(x) \leqslant \left(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)$.
   (c) Prouver que f admet une limite réelle ℓ en $+\infty$. Encadrer cette limite ℓ.

3. (a) Soit g la fonction définie sur $]\,0,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculer $g'(x)$.
   (b) En déduire que pour tout réel $x>0$, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$
   (c) Démontrer que f admet une limite finie en zéro. Préciser cette limite.
   On prolonge par continuité la fonction f en zéro en posant $f(0) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)$

4. (a) En étudiant le sens de variation de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}(x\ln x - x) - (f(x)-f(0))$ sur $]0,1]$, montrer que pour tout $x \in\,]\,0;1[$, $f(x)-f(0) \leqslant \frac{1}{2}(x\ln x - x)$
   (b) Démontrer que f n'est pas dérivable à droite en zéro. Que peut-on dire de la courbe Γ au point d'abscisse zéro ?
   (c) Tracer l'allure de la courbe Γ. On donne $f(0)\approx 0.9$; $f(2)\approx 0,1$; $f(3)\approx 0.2$ et $f(4)\approx 0,3$.