Exercice N°1 *(SP.2001)* ©

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ on considère les points A et B d'affixes respectives a et 1 où a est un nombre complexe donné différent de 1.
Soit f l'application de P \ {B} dans P qui' à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{z-a}{z-1}$.

1. Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation $E : z^2 - 2z + a = 0$.
2. a) On suppose que $a = 1 + e^{2i\theta}$ où $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$. Résoudre l'équation E.
   b) Mettre sous forme trigonométrique chacune des solutions de E.
3. Dans cette question on suppose que a = - 1.
   Soit M un point de P \ {B} d'affixe z et M' le point z' = f(z).
   a) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM'}}\right) \equiv 0\,(2\pi)$.
   En déduire que la demi – droite [BA) est une bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}\right)$.
   b) Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$.
   c) En déduire la construction du point M'image d'un point M du cercle trigonométrique privé du point B.

Exercice N°2 *(SC.2002)* ©

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et –1 et on désigne par P' le plan P privé du point A.
Soit f l'application de P' dans P qui à tout point M de P' d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{z\left(\bar{z}-1\right)}{z-1}$.

1. a) Soit C le point d'affixe i. Déterminer le point $f(C)$.
   b) Soit ζ le cercle de centre O et de rayon 1. Montrer que pour tout point M de $\zeta \setminus \{A\}$, on a : $f(M) = B$.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
3. Soit M un point quelconque du plan privé de la droite (AB) et du cercle ζ.
   On désigne par M_1 l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (AB) et par M' l'image de M par f.
   a) On désigne par $z_{\overrightarrow{M_1M'}}$ et $z_{\overrightarrow{AM_1}}$ les affixes respectifs des vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{AM_1}$.
   Montrer que $\dfrac{z_{\overrightarrow{M_1M'}}}{z_{\overrightarrow{AM_1}}} = \dfrac{\bar{z}-z}{|z-1|^2}$. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{AM_1}$ sont orthogonaux.
   b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont orthogonaux.
   c) En déduire une construction géométrique du point M'.

Exercice N°3 *(SP.2003)*

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation
$E_d : z^3 + \left(3 - d^2\right)z + 2i\left(1 + d^2\right) = 0$.
Où d est un nombre complexe donné de module 2.

1. a) Vérifier que 2i est une solution de E_d.
   b) Résoudre alors l'équation E_d.
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ on considère les points A, B, M, N d'affixes respectives 2i ; -i ; -i + d ; -i – d.
   a) Calculer MN et déterminer le milieu de [MN].
   b) En déduire que lorsque d varie, les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera.
   c) Dans le cas où AMN est un triangle, montrer que O est le centre de gravité du triangle AMN.
   d) En déduire les valeurs de d pour lesquelles le triangle AMN est isocèle de sommet principal A.

Exercice N°4 *(SC.2003)*

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante : $(E) : z^3 - 2\left(\sqrt{3} + i\right)z^2 + 4\left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 8i = 0$

1. a) Montrer (E) admet une solution
imaginaire pure que l'on déterminera.
b) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.
c) Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E).
2. Soit θ un réel et E_θ l'équation :
$\left(E_\theta\right) : z^3 - 2e^{i\theta}\left(\sqrt{3} + i\right)z^2 + 4e^{2i\theta}\left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 8ie^{3i\theta} = 0$ a) Démontrer que : $\left(ze^{-i\theta}\right)$ est solution de (E) si et seulement si z est solution de E_θ.
b) En déduire les solutions de l'équation
$\left(E_\pi\right)$ suivante : $z^3 + 2\left(\sqrt{3} + i\right)z^2 + 4\left(1 + i\sqrt{3}\right)z + 8i = 0$
3. Représenter dans le plan rapporté à un
repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ les images des solutions des équations (E) et $\left(E_\pi\right)$ et vérifier qu'elles sont les sommets d'un polygone régulier

Exercice N°5 *(SP.2004)*

Soit a un nombre complexe non nul et E l'équation $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$.
1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation E.
2. Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $1 + ia$ et $1 - ia$. On pose $a = a_1 + ia_2$; a_1 et a_2 réels.
a) Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $a_1 = 0$.
b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si $|a| = 1$.
3. On suppose que $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
a) Vérifier que pour tout réel x, on a : $1 + e^{ix} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$ et $1 - e^{ix} = -2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$.
b) En déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres complexes $1 + ia$ et $1 - ia$.
c) Déterminer a pour que les points O, A et B forment un triangle isocèle rectangle en O.

Exercice N°6 *(SP.2005)* ©

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$, on donne le point A d'affixe 1.
Soit l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :
$z'=\frac{1+i}{\sqrt{2}}z+1-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

1. Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.
2. Soit le point M_0 d'affixe 2. On pose pour tout entier naturel n, $M_{n+1}=f\left(M_n\right)$. On désigne par z_n l'affixe du point M_n et par Z_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM_n}$.

a) Montrer que $Z_1=e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $Z_n=e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

c) En déduire l'ensemble des valeurs de n pour les quelles les points A, M_0 et M_n sont alignés.

Exercice N°7 *(SP.2006)*

θ est un réel de l'intervalle $\left[0,2\pi\right[$; on pose pour tout nombre complexe z

$$f_\theta(z)=z^2-\left(i+e^{i\theta}\right)z+\left(1+i\right)\left(-1+e^{i\theta}\right).$$

1. a) Vérifier que $f_\theta\left(1+i\right)=0$.

b) En déduire les solutions z' et z '' dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f_\theta\left(z\right)=0$.

2. Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ on considère les points A, B et M d'affixes respectives – 1 , $i\sqrt{3}$ et $-1+e^{i\theta}$.

a) Montrer que lorsque θ varie dans $\left[0,2\pi\right[$, M varie sur un cercle ($\mathscr{C}$) de centre A dont on précisera le rayon.

b) Déterminer les valeurs de θ pour les quelles la droite (BM) est tangente au cercle ($\mathscr{C}$).

Exercice N°8 *(SP.2007)*

1. Soit θ un réel de l'intervalle $\left]0,\pi\right[$.

Résoudre l'équation $z^2-2iz-1-e^{2i\theta}=0$.

2. Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ on considère les points A, M et N d'affixes respectives $-1+i$; $i+e^{i\theta}$ et $i-e^{i\theta}$ où θ est un réel de l'intervalle $\left]0,\pi\right[$.

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux.

b) Montrer que lorsque θ varie dans $\left]0,\pi\right[$, les points M et N varient sur un cercle ($\mathscr{C}$) que l'on déterminera.

3. a) Déterminer en fonction de θ l'aire $\mathscr{A}$ (θ) du triangle AMN.

b) Déterminer la valeur de θ pour la quelle l'aire $\mathscr{A}$ (θ) est maximale et placer dans ce cas les points M et N sur le cercle ($\mathscr{C}$).

Exercice n°1 :

Soit f l'application de P \ {B} dans P qui' à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=\dfrac{z-a}{z-1}$.

1. M est un point invariant par f $\Leftrightarrow$ f(M) = M $\Leftrightarrow$ $z=\dfrac{z-a}{z-1}$

$$\Leftrightarrow z(z-1)=z-a \Leftrightarrow z^2-z=z-a \Leftrightarrow z^2-2z+a=0$$

2. a)

$$z^2-2z+1+e^{2i\theta}=0 \Leftrightarrow (z-1)^2+e^{2i\theta}=0 \Leftrightarrow (z-1)^2=-e^{2i\theta}=\left(ie^{i\theta}\right)^2 \Leftrightarrow z-1=ie^{i\theta},\text{ ou } z-1=-ie^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow\ z=1+ie^{i\theta}\ \text{ ou }\ z=1-ie^{i\theta}$$

b)

*

$$z'=1+ie^{i\theta}=1+e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\underbrace{\left(e^{-i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right)}_{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\underbrace{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}_{<0\text{ car }\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}<\pi}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\underbrace{-2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}_{>0}e^{i(\cos)}$$

$$=-2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

$$z''=1-ie^{i\theta}=1+e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}=e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\underbrace{\left(e^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right)}_{2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=\underbrace{2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}_{>0\text{ car }0<\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}}e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

*

$$=2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

3. a) $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}}\right)+\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}}\right)\equiv\arg(z-1)+\arg(z'-1)[2\pi]\equiv\arg\left[(z-1)\times(z'-1)\right][2\pi]$

Or $z'=\dfrac{z+1}{z-1}\Rightarrow(z-1)\times(z'-1)=2\ \Rightarrow\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}}\right)+\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}}\right)\equiv 0(2\pi)$

$\overrightarrow{BA}=-2\vec{u}\Rightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\pi+\left(\widehat{\overrightarrow{BM},\vec{u}}\right)(2\pi)\equiv\pi-\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}}\right)(2\pi)\equiv\pi+\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}}\right)(2\pi)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM'}}\right)(2\pi)$

$\Rightarrow$ [BA) est une bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)$.

b) z′ est imaginaire pur ⇔

$$\overline{z'}=-z'\Leftrightarrow\overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)}=-\frac{z+1}{z-1}\Leftrightarrow\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}=-\frac{z+1}{z-1}\Leftrightarrow z\overline{z}-\overline{z}+z-1=-z\overline{z}-\overline{z}+z+1$$

$$\Leftrightarrow 2z\overline{z}=2\Leftrightarrow z\overline{z}=1\Leftrightarrow |z|^2=1\Leftrightarrow |z|=1$$

c) $M\in\zeta_{(O,\,1)}\setminus\{B\}\Leftrightarrow |z|=1$ et $z\neq 1$

⇔ z′ est imaginaire pur

$\Leftrightarrow M'\in\left(O;\vec{v}\right)$

Ainsi $M'\in[Bt)\cap\left(O,\vec{v}\right)$

Où [Bt) est symétrique de [BM) par rapport à (AB).

Exercice n°2 :

Soit f l’application de P’ dans P qui à tout point M de P’ d’affixe z associe le point M’ d’affixe z’ tel que : $z'=\dfrac{z\left(\overline{z}-1\right)}{z-1}$.

1. a) C(i) et C′ = *f*(C) d’affixe $z'=\dfrac{i\left(-i-1\right)}{i-1}=\dfrac{1-i}{i-1}=-1\Rightarrow$ C′ = B ⇒ *f*(C) = B.

   b) M de $\zeta\setminus\{A\}\Leftrightarrow$ OM = 1 et M ≠ A ⇔ |z| = 1 et z ≠ 1

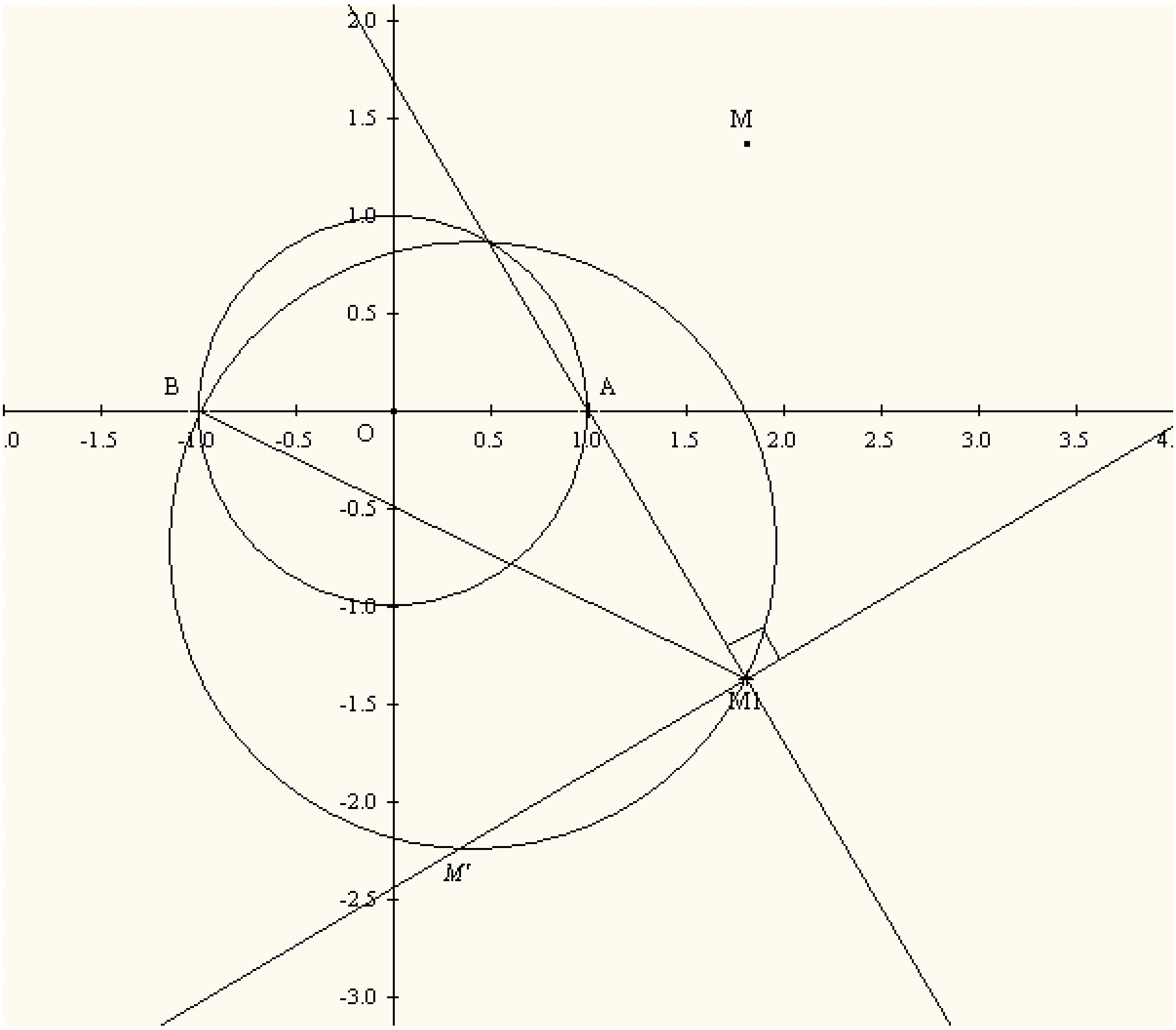
   $$\Rightarrow z'=\frac{z\left(\overline{z}-1\right)}{z-1}=\frac{z\overline{z}-z}{z-1}=\frac{|z|^2-z}{z-1}=\frac{1-z}{z-1}=-1\Rightarrow M'=f(M)=B.$$
2. M est un point invariant par *f* ⇔ *f*(M) = M ⇔

   $$z=\frac{z\left(\overline{z}-1\right)}{z-1}\Leftrightarrow z^2-\cancel{z}=z\overline{z}-\cancel{z}\Leftrightarrow z\left(z-\overline{z}\right)=0\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } z=\overline{z}\Leftrightarrow M\in\left(O,\vec{u}\right)\setminus\{A\}$$

3. a) $$\frac{z_{\overrightarrow{M_1M'}}}{z_{\overrightarrow{AM_1}}}=\frac{z'-z_1}{z_1-1}=\frac{\dfrac{z\left(\overline{z}-1\right)}{z-1}-\overline{z}}{\overline{z}-1}=\frac{\overline{z}-z}{(z-1)\left(\overline{z}-1\right)}=\frac{\overbrace{\overline{z}-z}^{\text{imaginaire pur}}}{\underbrace{|z-1|^2}_{\text{réel}}}\in i\mathbb{R}\Rightarrow\overrightarrow{M_1M'}\perp\overrightarrow{AM_1}$$

   b) $$\frac{z_{\overrightarrow{M_1M'}}}{z_{\overrightarrow{BM'}}}=\frac{z'-z_1}{z'+1}=\frac{\dfrac{z\left(\overline{z}-1\right)}{z-1}-\overline{z}}{\dfrac{z\left(\overline{z}-1\right)}{z-1}+1}=\frac{\overline{z}-z}{z\overline{z}-1}=\frac{\overbrace{\overline{z}-z}^{\text{imaginaire pur}}}{\underbrace{|z|^2-1}_{\text{réel}}}\in i\mathbb{R}\Rightarrow\overrightarrow{M_1M'}\perp\overrightarrow{BM'}.$$

   c)



$M' \in (d) \cap \zeta'$, où (d) est la perpendiculaire à(AM_1) en M_1 et ζ' est le cercle de diamètre $[B\ M_1]$.

Exercice n°6 :

Soit l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :
$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}z + 1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

1. f : M(z) $\rightarrow$ M'(z') tel que : $z' - 1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}(z-1) \Leftrightarrow z' - 1 = e^{i\frac{\pi}{4}}(z-1)$

   D'où f est la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{4}$.

2. $M_0(2)$ et $M_{n+1} = f(M_n)$; $M_n(z_n)$ et $Z_n = aff\left(\overrightarrow{AM_n}\right) = z_n$ - 1.

   a) $Z_1 = z_1 - 1 = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_0 - 1) = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

   b) Montrons par récurrence que pour tout n de IN, $Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$

- Pour n = 0, $Z_0 = z_0 - 1 = 1 = e^{i0\frac{\pi}{4}}$

- Pour n ≥ 0, supposons que $Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$ et montrons que $Z_{n+1} = e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}$

  En effet : $Z_{n+1} = z_{n+1} - 1 = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z_n - 1\right) = e^{i\frac{\pi}{4}} \times Z_n = e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{n\pi}{4}} = e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}$

  Ainsi : ∀ n ∈ IN, $Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$

c) A, M_0 et M_n sont alignés ⇔ $\overrightarrow{AM_n}$ et $\overrightarrow{AM_0}$ sont colinéaires ⇔ $\frac{Z_n}{Z_0} = Z_n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$ est réel

⇔ $n\frac{\pi}{4} = k\pi,\ k \in IN$ ⇔ n = 4k, k ∈ IN ⇔ n est un multiple de 4.