Séries d'exercices *3ème technique*
GENERALITES (FONCTIONS)

EXERCICE N°1

On considère la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ *par* $f(x)=\dfrac{-4x^2+8x-2}{1-2x}$.

1°)Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{1-2x}$.

2°)Etudier les variations des fonctions g et h définies sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ *par* $g(x)=\dfrac{1}{1-2x}$ *et* $h(x)=2x-3$.

3°)Déduire des deux questions précédentes les variations de la fonction f.

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie sur $[-3\,;+\infty[$ *par :* $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+5}$

1°) Démontrer que f(x) peut aussi s'écrire : $f(x)=2-\dfrac{7}{x+5}$.

2°) Démontrer que f est croissante sur $[-3\,;+\infty[$

3°) a) Démontrer que f admet un minimum, le préciser.

b) Démontrer que f admet un majorant, en préciser un.

c) En déduire que f est bornée et indiquer un encadrement de f(x).

EXERCICE N°3

On considère les fonctions de références suivantes :

u définie sur R par $u(x)=x^2$ *et v définie sur l'ensemble des réels non nuls par* $v(x)=\dfrac{1}{x}$.

Décomposer chacune des fonctions suivantes à l'aide des fonctions u, v et de fonctions affines. En déduire leurs variations sur l'intervalle donné.

- *a)* $f(x)=(4-2x)^2$ *sur* $[2\,;+\infty[$.
- *b)* $g(x)=\dfrac{2}{x}-1$ *sur* $]0\,;+\infty[$.

EXERCICE N°4

Etudier les variations de f sur I.

1°) $f(x)=x^2-2x+1,\quad I=]1,+\infty[$

2°) $f(x)=x^3-x^2+1,\quad I=\left]0,\frac{2}{3}\right[$

EXERCICE N°5

On considère la fonction f définie dur par : $f(x)=x(1-x)$

1°)Montrer que , pour tout x de R : $f(x)\leq\dfrac{1}{4}$

2°)En déduire que la fonction f admet un maximum en $x=\dfrac{1}{2}$

3°)Démontrer que $f(x)=\dfrac{1}{4}-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$ *et en déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle* $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ *et décroissante sur l'intervalle* $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$

EXERCICE N°6

Montrer que la fonction f : $f(x)=1-x+\dfrac{1}{1+x}$ *est décroissante sur* $]-1,+\infty[$

EXERCICE N°7

Soit : $f:R^*\to R,\ x\mapsto x+\dfrac{1}{x}$

1°)Montrer que : pour tout x de $\left[\frac{1}{2},3\right]$ *, on a :* $2\leq f(x)\leq\dfrac{10}{3}$

2°) En déduire que : $\forall(a,b,c,d,e,f,g,h)\in R_+^* : \frac{a}{h}+\frac{b}{g}+\frac{c}{f}+\frac{d}{e}+\frac{e}{d}+\frac{f}{c}+\frac{g}{b}+\frac{h}{a}\geq 8$

EXERCICE N°8

On considère les fonctions f et g définie par $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$ *et* $g(x)=x-\frac{1}{x}$

1°)Déterminer le domaine de définition de g et étudier sa parité.
2°)Montrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$
3°)Sur $]0,+\infty[$, *résoudre l'équation g(x) = 0 et chercher le signe de g(x).*
4°)Déterminer les variations de g^2
5°)Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa parité.
6°)Exprimer f en fonction de g^2
7°)En déduire les variations de f sur $]0,+\infty[$. *Dresser le tableau de variation de f .*

EXERCICE N°9

Déterminer le plus grand des deux nombres : $A=\frac{1,0000004}{(1,0000006)^2}$ *et* $B=\frac{(0,9999995)^2}{0,9999998}$

EXERCICE N°10

Un triangle isocèle ABC a pour base [BC] telle que BC=6 et pour hauteur [AH] telle que AH=5. Considérons sur [AH] un point M et posons AM=x.
La parallèle à (BC) passant par M coupe [AB] en I et [AC] en J.
1°)Calculer la langueur IJ en fonction de x.
2°)a)Désignons par y l'aire du triangle AIJ. Exprimer y en fonction de x lorsque M décrit [AH].
b)Soit f la fonction qui à x associe y. Préciser l'ensemble de définition de f .
c)Etudier les variations de f.

EXERCICE N°11

ABC est un triangle isocèle tel que AB=AC=5 et BC=6. Par un point D de [AB], tracez la parallèle à (BC) ; elle coupe (AC) en E. On pose AD=x.
1°)Calculer BD, EC, ED en fonction de x.
2°)Désignons par y le périmètre du trapèze BDEC. Exprimer y en fonction de x.
Représentez graphiquement la fonction f définie sur [0,5], qui à x associe y.
3°)La hauteur du triangle ABC, issue de A, coupe [DE] en I et [BC] en H.
a)Calculer AH.
b)Calculer, en fonction de x, l'aire z du trapèze BDEC.
c)Etudier la fonction g définie sur [0,5] qui à x associe z.

EXERCICE N°12

Un triangle ABC, de hauteur [AH], est tel que AB=5, BC=8, AH=4. Construisez un tel triangle. Par un point K de [AH], menez la parallèle à (BC) qui coupe respectivement [AB] et [AC] en M et N.
Soit P et Q les projetés orthogonaux respectifs de M et N sur (BC). Posons AK=x
1°)Calculer, en fonction de x, le périmètre, noté p(x), du rectangle MNPQ.
Etudier les variations de la fonction p et tracez sa courbe représentative.
2°)Calculer en fonction de x l'aire, notée a(x), du rectangle MNPQ.
Etudier les variations de la fonction a et tracez sa courbe représentative.
3°)Déterminer x pour que l'aire du rectangle soit maximale. Calculer ce maximum.

EXERCICE N°13

ABCD est un trapèze isocèle de bases [AB] et [CD] tel que : AB=12 , BC=5 et CD=6.
Soit M un point de [AD]. La parallèle à (AB) passant par M coupe (BC) en N. Soit H le projeté orthogonal de C sur [AB] et E le point d'intersection de (CH) et (MN). Posons AM=x.

1°)Montrer que : $EN=\frac{3}{5}(5-x)$ *et* $EH=\frac{4}{5}x$. *En déduire que* $MN=\frac{6}{5}(10-x)$

2°)Désignons par y l'aire du trapèze MNBA.
a/Exprimer y en fonction de x.
b/ Etudier les variations de la fonction f, définie sur [0,5], qui à x associe y et tracez sa courbe représentative

EXERCICE N°14

La figure 2 est la représentation graphique d'une fonction u définie sur R. Les deux autres courbes sont les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur R telles que : f(x) = u(x+a) et g(x)=u(x)+b où a et b sont des réels.
Trouver les courbes représentatives des fonctions f et g et donner la valeur des réels a et b.

Figure 1

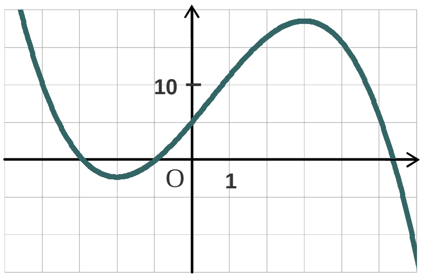


Figure 2

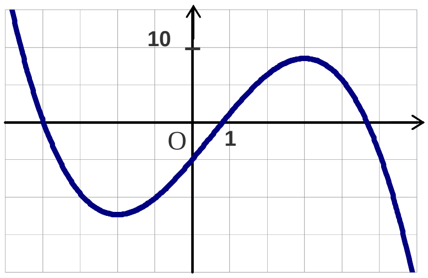
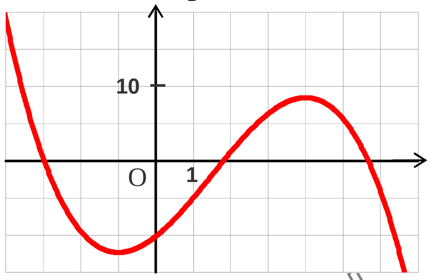
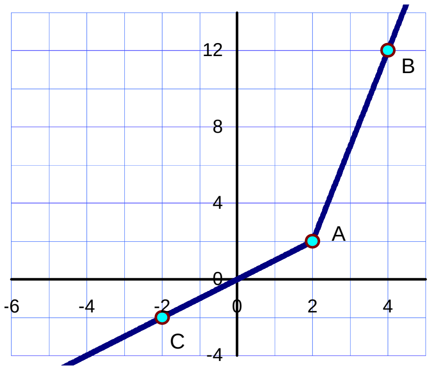


Figure 3



EXERCICE N°15



f est une fonction affine par morceaux définie sur $\mathbb{R}$ telle que
$f(x)=a\left|2-x\right|+bx+c$

1. *Déterminer les réels a, b et c sachant que la courbe représentative de la fonction f est donnée ci-contre.*
2. *Exprimer $f(x)$ sans utiliser la notation valeur absolue.*