

EXERCICE N°1

Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{2}{x} & \text{si } x > 2 \\ f(x) = \frac{x}{2} & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

Etudier la dérivabilité de f en 2 et indiquer les conséquences graphiques des résultats obtenus.
Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1 \\ f(1) = m \end{cases}$$

- 1°) Quelle valeur faut-il donner à m pour que f soit continue en 1.
- 2°) Etudier alors la dérivabilité de f en 1.
- 3°) Que peut-on dire de la courbe C_f au point d'abscisse 1 ?

EXERCICE N°2

Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = (x+1)^2 & \text{si } x \leq -1 \\ f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ f(x) = \frac{2x+2}{x+2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- 1°) Etudier la continuité de f en -1 et 0 .
- 2°) Montrer que f est dérivable en $a = -1$ et interpréter graphiquement le résultat.

3°) Vérifier que pour tout $x \in]-1, 0[$: on a :
$$\frac{f(x) - 1}{x} = \sqrt{x+1} + \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

4°) Etudier la dérivabilité de f en 0 . Ecrire une équation de la tangente ou des demi tangentes éventuelles au point A d'abscisse 0 et les construire.

5°) On considère la fonction g définie sur \mathbb{R}_+^* par :
$$g(x) = \frac{2x+2}{x+2}$$

- a- Montrer que g est dérivable en tout point a de $]0, +\infty[$ et calculer $g'(a)$
- b- Montrer que (ζg) admet une tangente parallèle à la droite $\Delta : x - 3y + 1 = 0$

EXERCICE N°3

Soit la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$; où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$.

On désigne par (ζf) la courbe représentative de f dans un repère du plan.

- 1°) Montrer que f est dérivable en tout point x_0 de \mathbb{R} et calculer $f'(x_0)$.
- 2°) Déterminer les réels a, b et c pour les deux conditions suivantes soient satisfaites :
 - (ζf) admet en son point d'abscisse 2 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
 - (ζf) admet en son point d'abscisse 1 pour tangente la droite $\Delta : 2x + y - 4 = 0$

EXERCICE N°4

Soit la fonction f définie \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + 4 - x & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = \frac{(m+1)x^3 - 3x + m^2}{x-1} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ f(x) = x^2\sqrt{-x} + 2x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- 1°) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 2°) Etudier suivant m , $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
- 3°) Etudier suivant m la continuité de f en 1.
- 4°) Etudier suivant m la dérivabilité de f en 1 et interpréter graphiquement le résultat.
- 5°) On prend $m=1$ et $x_0 \in]0, 1[$
 - a- Montrer que f est dérivable en x_0 .
 - b- Existe-t-il un point de (ζf) d'abscisse x_0 où la tangente est parallèle à $\Delta : 4x - y + 3 = 0$
 - c- Existe-t-il un point de (ζf) d'abscisse x_0 où la tangente est perpendiculaire à $\Delta' : x - 3y - 3 = 0$



EXERCICE N°5

Soient les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x+1}$, $h : x \mapsto (1+x)^2$, $k : x \mapsto (1+x)^3$,
 $m : x \mapsto (1+x)^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

- 1°) Justifier que chacune des ces fonctions sont dérivables en 0 et calculer $f'(0)$ et $g'(0)$
- 2°) Déterminer les approximations affine de f et g au voisinage de 0.
- 3°) Calculer alors $\sqrt{1,0002}$, $\sqrt{0,995}$, $\frac{1}{0,996}$, $\frac{1}{1,0008}$, $0,97^2$, $0,97^3$, $0,97^{2008}$

EXERCICE N°6

Soit (ζf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

(Voir figure)

1°) Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

- a) $f'(-4) < 0$
- b) $f'(1) < 0$

2°) Par un lecture graphique, Calculer : $f'(-4)$, $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(1)$

3°) Soient T_{-4} , T_{-2} et T_1 les tangentes à (ζf) respectives aux points d'abscisses -4, -2 et 1.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

- a) T_{-4} est parallèle à T_{-2}
- b) T_{-4} est perpendiculaire à T_1

4°) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f'(x) < 0$

5°) Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 1$ et on a pour tout $x \geq 1$: $g(x) = f(x)$. Etudier la dérivabilité de g en 1.

6°) Sachant que pour tout $x \geq 1$, il existe des réels a , b et c tel que $f(x) = ax^2 + bx + c$

Etablir que : $g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 4 & \text{si } x \geq 1 \\ 2x^2 - 6x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

7°) Calculer $g'(x_0)$ pour tout $x_0 \in]1, +\infty[$ et $x_0 \in]-\infty, 1[$

8°) Existe-t-il un point de (ζg) d'abscisse $x_0 \in]1, +\infty[$ où la tangente est parallèle à $\Delta : 3x - y + 1 = 0$

9°) Existe-t-il un point de (ζg) d'abscisse $x_0 \in]-\infty, 1[$ où la tangente est perpendiculaire à $\Delta' : y - 2x + 1 = 0$

10°) Discuter, suivant les valeurs de m , le nombre de points d'intersection de courbe (ζg) avec la droite $D_m : y = x - m$ ($m \in \mathbb{R}$)

11°) Lorsque D_m coupe (ζg) en deux points distincts ou confondus M' et M'' , on appelle I le milieu de $[M'M'']$. Quel est l'ensemble des points I lorsque m varie.

EXERCICE N°7

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 2|x - 1|$

1°) Etudier la dérivabilité de f en 1.

2°) Dresser le tableau de variations de f et préciser la nature de chacun extrema.

EXERCICE N°8

Soit la fonction $f_a : x \mapsto \frac{2x^2 - 3x + a}{x - 2}$ où a est un paramètre réel. On note (ζ_a) la courbe représentative de f_a

dans le plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

1°) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x - 1)$. Interpréter graphiquement le résultat.

2°) Dresser le tableau de variations de f_0 .

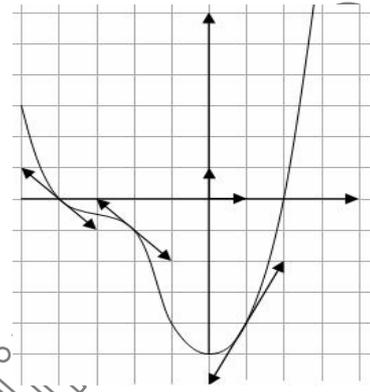
3°) Pour quelles valeurs de a , la fonction f_a admet un maximum et un minimum ?

4°) Exprimer en fonction de a les coordonnées des deux points correspondants de (ζ_a) et déterminer l'ensemble de ces points quand m varie.

4°) Soit K le point où (ζ_a) coupe l'axe des ordonnées. Ecrire l'équation de la tangente en K à la courbe (ζ_a) et montrer que cette tangente coupe l'asymptote oblique de (ζ_a) en un point fixe T dont on donnera les coordonnées.

EXERCICE N°9

Soit f la fonction définie par : $f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - 4x + 3}$ où $a \in \mathbb{R}$



Déterminer le réel a pour lesquels f_a :

- 1°) N'admet pas d'extremums.
- 2°) Admet un maximum et un minimum.
- 3°) Admet uniquement un minimum.

EXERCICE N°10

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a .

Soit $M \in [BC] \setminus \{B, C\}$, H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB) et (AC) , on pose $BM=x$.

1°) Exprimer en fonction de x l'aire $A(x)$ du quadrilatère $AHMK$.

2°) Déterminer x pour que l'aire soit maximal.

EXERCICE N°11

Discuter suivant les valeurs de a , le nombre d'extremums de la fonction f_a définie par :

$$f_a(x) = \frac{2x^2 + ax}{x^2 - 1} \text{ où } a \in \mathbb{R}$$

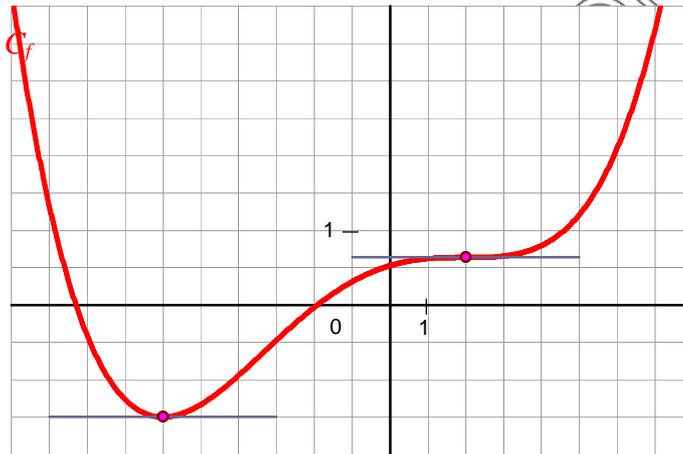
EXERCICE N°12

La courbe (C_f) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur \mathbb{R} dans un repère du plan.

On note f' la fonction dérivée de f .

La courbe (C_f) vérifie les propriétés suivantes :

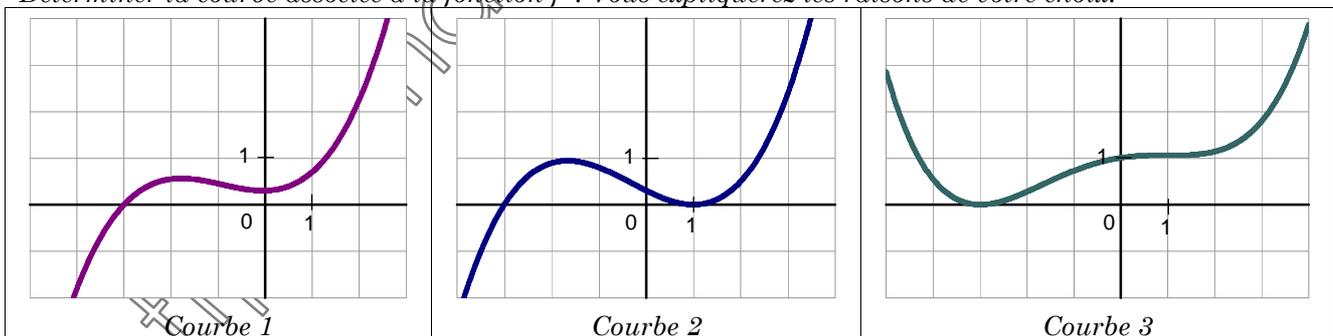
- Les tangentes à la courbe (C_f) aux points d'abscisse -3 et 1 sont parallèles à l'axe des abscisses ;
- la tangente à la courbe (C_f) au point de coordonnées $\left(3, \frac{21}{10}\right)$ passe par le point de coordonnées $\left(4, \frac{45}{10}\right)$.



1°) Donner les valeurs de $f'(-3)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.

2°) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $f'(x) > 0$

3°) Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une seule représente la fonction dérivée f' de f sur \mathbb{R} . Déterminer la courbe associée à la fonction f' . Vous expliquerez les raisons de votre choix.



EXERCICE N°13

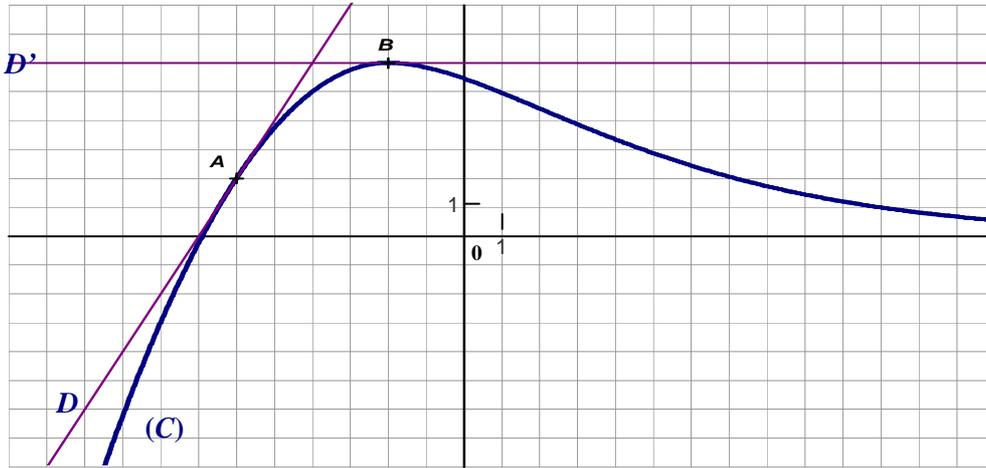
Soit une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} .

La courbe (C) donnée ci-après représente la fonction f dans un repère orthonormal du plan.

Cette courbe passe par les points $A(-3; 1)$ et $B(-1; 3)$.

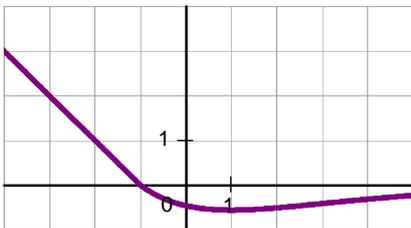
Les droites (D) et (D') sont les tangentes à la courbe respectivement en A et en B et sont sécantes au point d'abscisse -2 .



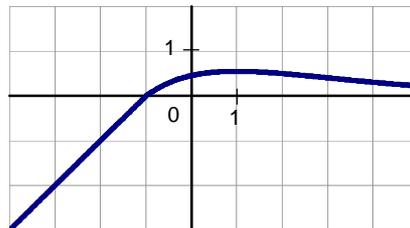


1°) Déterminer graphiquement $f'(-3)$ et $f'(-1)$.

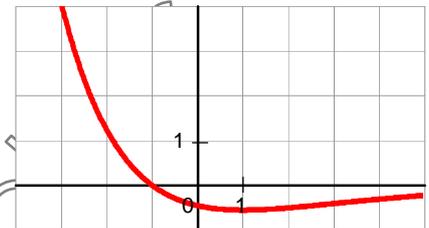
2°) Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une seule représente la fonction dérivée f' de f sur \mathbb{R} . Déterminer la courbe associée à la fonction f' . Vous expliquerez les raisons de votre choix.



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

3°) Soit g la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-\frac{31}{10}, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

a) Donner les variations de la fonction g .

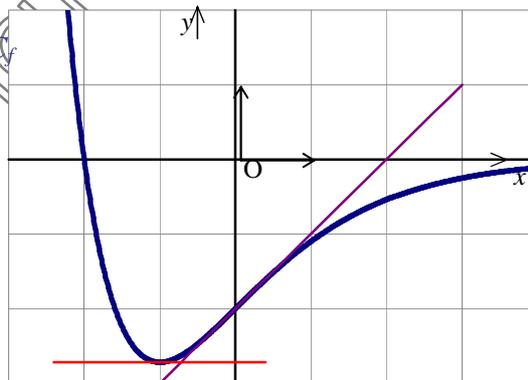
b) Calculer $g'(-3)$.

EXERCICE N°14

La courbe (C_f) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur \mathbb{R} dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On note f' la fonction dérivée de f .

La courbe (C_f) vérifie les propriétés suivantes :

- Les points de coordonnées respectives $(-2, 0)$ et $(0, -2)$ appartiennent à la courbe tracée ;
- la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses ;
- la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0 coupe l'axe des abscisses en $x = 2$.



1°) Donner les valeurs de $f(0)$, $f'(-1)$, et $f'(0)$.

2°) Parmi les quatre représentations graphiques ci-dessous, une seule représente la fonction dérivée f' de f sur \mathbb{R} . Vous expliquerez les raisons de votre choix.



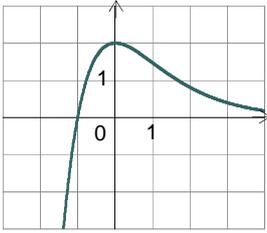


Figure 1

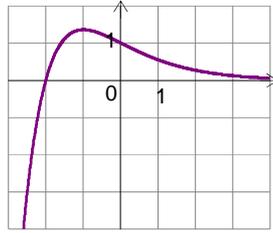


Figure 2

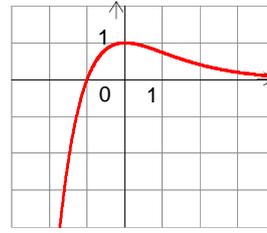


Figure 3

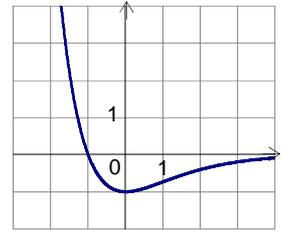


Figure 4

Déterminer la courbe associée à la fonction f' . Vous expliquerez les raisons de votre choix.

<http://maths-akir.nidiblogs.com/>

