

Exercice n°1.

Dans un sous-groupe de 40 personnes la taille moyenne est de 170 cm.

Dans un deuxième sous-groupe de 10 personnes la taille moyenne est de 180 cm.

Dans un troisième sous-groupe de 50 personnes la taille moyenne est de 175 cm.

- 1) Déterminer la taille moyenne du groupe constitué par les trois sous-groupes précédents.
- 2) Quelle serait la taille moyenne si les trois sous-groupes étaient constitués du même nombre de personnes ?

Exercice 2.

La température est relevée chaque heure pendant 4 jours dans une forêt. Les 97 résultats obtenus ont été triés et sont rassemblés dans le tableau suivant :

Température	14,5	15	15,5	16	16,5	17	17,5	18	18,5	19	19,5
Nombre de fois où cette température a été relevée	5	7	10	12	15	10	11	9	7	7	4

Déterminer la médiane M, les quartiles Q_1 et Q_3 de cette série statistique.

Exercice 3.

Le tableau ci-dessous donne la répartition des salaires mensuels, en Dinars, des employés d'une entreprise :

Salaires	[800 ; 900[[900 ; 1000[[1000 ; 1050[[1050 ; 1150[[1150 ; 1300[
Effectif	42	49	74	19	16

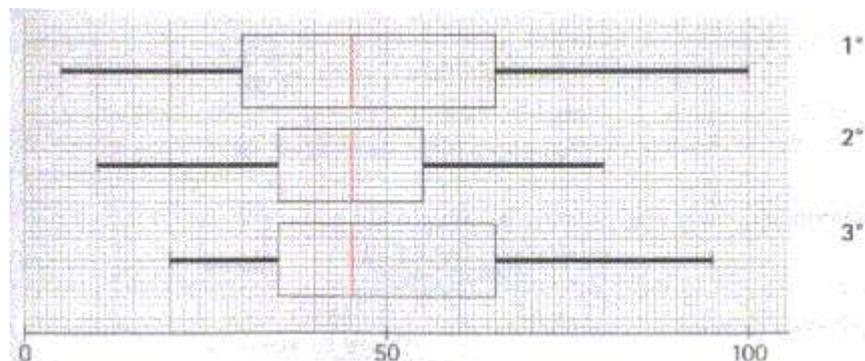
- 1) Calculer le salaire moyen dans cette entreprise. Que penser d'un tel résultat ?
- 2) Dans cette entreprise, combien d'employés gagnent au plus 1050 Dinars ?

Dresser le polygone des effectifs cumulés croissants et lire une valeur approchée de la médiane et de Q_1 et de Q_3 .

- 3) Calculer de manière précise la médiane et les quartiles Q_1 et Q_3 .
- 4) Construire le diagramme en boîte de la série statistique.

Exercice 4.

Sur chacun des diagrammes ci-dessous, lire l'étendue, la médiane, les quartiles et les écarts interquartiles.



Exercice 5

Le tableau suivant donne les températures moyennes par mois à **Serbie** et à **Kosovo** en degrés Celsius.

Mois	Jan	Fév.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Aout	Sep.	Oct.	Nov.	Déc.
Serbie	-5	-4	4	15	27	31	31	30	26	20	10	-5
Kosovo	3	4	7	10	14	17	19	18	16	17	7	6

1) Calculer la moyenne, l'étendue, la variance et l'écart-type des températures mensuelles pour chacune de ces deux villes.

2) Comparer et analyser les résultats obtenus.

Exercice 6

Lors d'un examen écrit, un correcteur a obtenu les notes suivantes (sur 20), sur 80 copies corrigées :

11 ; 11 ; 11 ; 7 ; 6 ; 13 ; 13 ; 7 ; 4 ; 9 ; 5 ; 10 ; 11 ; 8 ; 14 ; 15 ; 8 ; 10 ; 4 ; 9 ; 7 ; 7 ; 9 ; 12 ; 10 ; 14 ; 18 ; 6 ; 9 ;
10 ; 13 ; 9 ; 12 ; 8 ; 10 ; 5 ; 7 ; 13 ; 12 ; 12 ; 13 ; 11 ; 9 ; 11 ; 9 ; 8 ; 10 ; 14 ; 10 ; 11 ; 9 ; 7 ; 7 ; 6 ; 10 ; 6 ; 11 ; 10 ;
8 ; 8 ; 11 ; 7 ; 6 ; 8 ; 11 ; 12 ; 14 ; 9 ; 12 ; 7 ; 8 ; 8 ; 16 ; 14 ; 9 ; 10 ; 7 ; 10 ; 10 ; 12.

1) Calculer la moyenne \bar{x} et l'écart type σ de la série.

2) Un échantillon de notes est dit "normal" si environ 30 % des notes sont en dehors de l'intervalle $[\bar{x} - \sigma ; \bar{x} + \sigma]$ et 5 % en dehors de l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma ; \bar{x} + 2\sigma]$.

L'échantillon obtenu est-il normal ?

Exercice 7

Trois groupes de fonctionnaires ont fait l'objet d'une notation. Les fonctionnaires de chaque groupe ont été notés par un noteur. Les résultats sont donnés dans les tableaux ci-dessous (la note maximale théorique est 40). Les fonctionnaires sont désignés A,B,C....W.

Groupe 1 Premier noteur						
A	B	C	D	E	F	G
38	36	36	34	34	34	33

Groupe 2 Deuxième noteur						
H	J	K	L	M	N	P
38	37	36	36	35	33	30

Groupe 3 Troisième noteur						
Q	R	S	T	V	W	
36	35	35	33	33	32	

1) Calculer la moyenne m_1 et l'écart type s_1 de la distribution statistique des sept notes attribuées par le premier noteur.

Les détails des calculs ne sont pas demandés. L'écart type sera arrondi au millième.

2) Indiquer de même

La moyenne m_2 et l'écart type s_2 de la distribution des sept notes attribuées par le deuxième notateur.

La moyenne m_3 et l'écart type s_3 de la distribution des six notes attribuées par le troisième notateur.

La moyenne \bar{m} et l'écart type \bar{s} de la distribution des 20 notes.

3) En vue d'une promotion, qui bénéficiera à 8 des 20 fonctionnaires concernés, on procède à une harmonisation des notes selon la formule : $\bar{n} = \bar{m} + \left(\frac{n-m_i}{s_i}\right) \times \bar{s}$ dans laquelle n désigne la note initialement attribuée à un fonctionnaire, \bar{n} sa note harmonisée, et i l'indice du groupe auquel ce fonctionnaire appartient.

4) Présenter dans un tableau la distribution des notes harmonisées et donner les noms des promus.

Correction

Exercice 1

1) Pour calculer la moyenne du groupe constitué par ces trois sous groupes, il faut tenir compte des effectifs de chacun de ces sous-groupes.

La moyenne du groupe des $40+10+50=100$ personnes vaut $\frac{40 \times 170 + 10 \times 180 + 50 \times 175}{100} = 173,5 \text{ cm}$

2) Si les trois sous-groupes étaient constitués du même nombre de personnes, il suffirait de considérer la moyenne arithmétique des trois valeurs 170, 180 et 175.

En effet, si on note x l'effectif commun des trois sous-groupes, alors la moyenne générale vaudra $\frac{x \times 170 + x \times 180 + x \times 175}{3x} = \frac{170 + 180 + 175}{3} = 175 \text{ cm}$

Exercice 2

Puisque le nombre d'observations est impair ($97=2 \times 48+1$), la médiane M sera égale à la 49^{ème} mesure de température, c'est-à-dire, en observant le tableau, à $16,5^\circ$.

(la 49^{ème} observation fait partie des 15 mesures égales à $16,5^\circ$).

Le quartile Q_1 est la plus petite valeur du caractère pour laquelle 25 % des valeurs de la série statistique lui sont inférieures ou égales.

Puisque 25% de l'effectif total représentent $97 \times \frac{25}{100} = 24,25$; le quartile Q_1 correspondra à la 25^{ème} mesure, c'est-à-dire 16° .

De même, le quartile Q_3 est la plus petite valeur du caractère pour laquelle 75 % des valeurs de la série statistique lui sont inférieures ou égales.

Puisque 75% de l'effectif total représentent $97 \times \frac{75}{100} = 72,75$; le quartile Q_3 correspondra à la 73^{ème} mesure, c'est-à-dire 18° .

Exercice 3

1) Pour calculer le salaire moyen de l'entreprise, il faut considérer le milieu de chaque classe :

Salaire	850	950	1025	1100	1225
Effectifs	42	49	74	19	16

Le calcul de la moyenne est donc :

$$\bar{x} = \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^5 N_i \times X_i}^{\text{somme des produits entre les valeurs et leurs effectifs}}}{\underbrace{\sum_{i=1}^5 N_i}_{\text{somme des effectifs}}} = \frac{N_1 \times X_1 + N_2 \times X_2 + \dots + N_5 \times X_5}{\underbrace{N_1 + N_2 + \dots + N_5}_{\text{effectif total}}} = \frac{42 \times 850 + 49 \times 950 + \dots + 16 \times 1225}{\underbrace{42 + 49 + \dots + 16}_{\text{effectif total}}} = \frac{198600}{200} = 993$$

Le salaire moyen dans cette entreprise est donc de 993 Dinars.

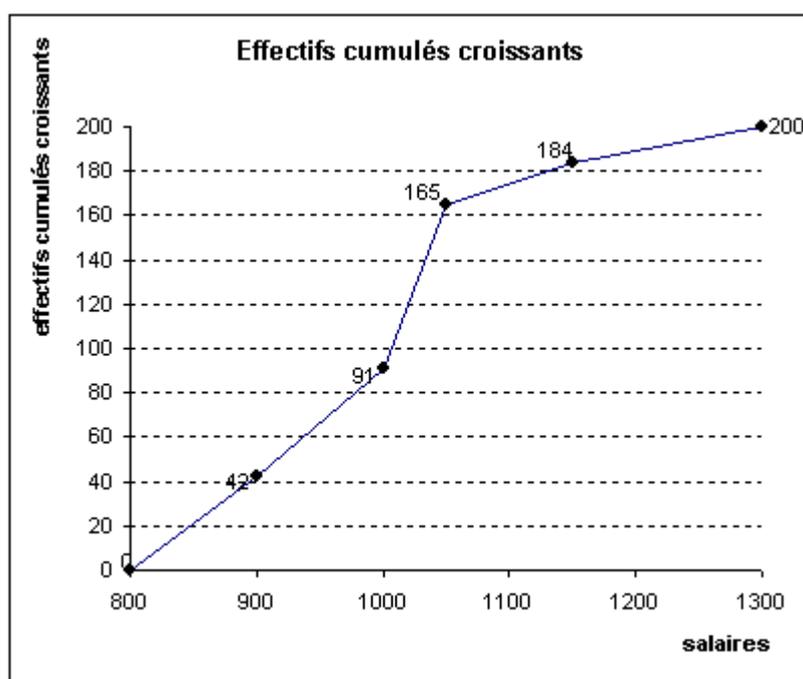
Il n'est pas forcément très représentatif de cette entreprise, car plus de la moitié des employés y gagnent plus de 1000 Dinars.

2) Pour répondre à cette question, il faut dresser le tableau des effectifs cumulés croissants :

Salaire	[800 ; 900[[900 ; 1000[[1000 ; 1050[[1050 ; 1150[[1150 ; 1300[
Effectifs cumulés croissants	42	42+49 =91	91+74=165	165+19=184	184+16=200

Ainsi, 165 employés gagnent au plus 1050 Dinars, au sein de cette entreprise.

A partir de ce tableau, on dresse le polygone des effectifs cumulés croissants.



A partir de ce polygone, on cherche le salaire médian, c'est-à-dire celui qui va partager la série statistique en deux parties d'égale amplitude.

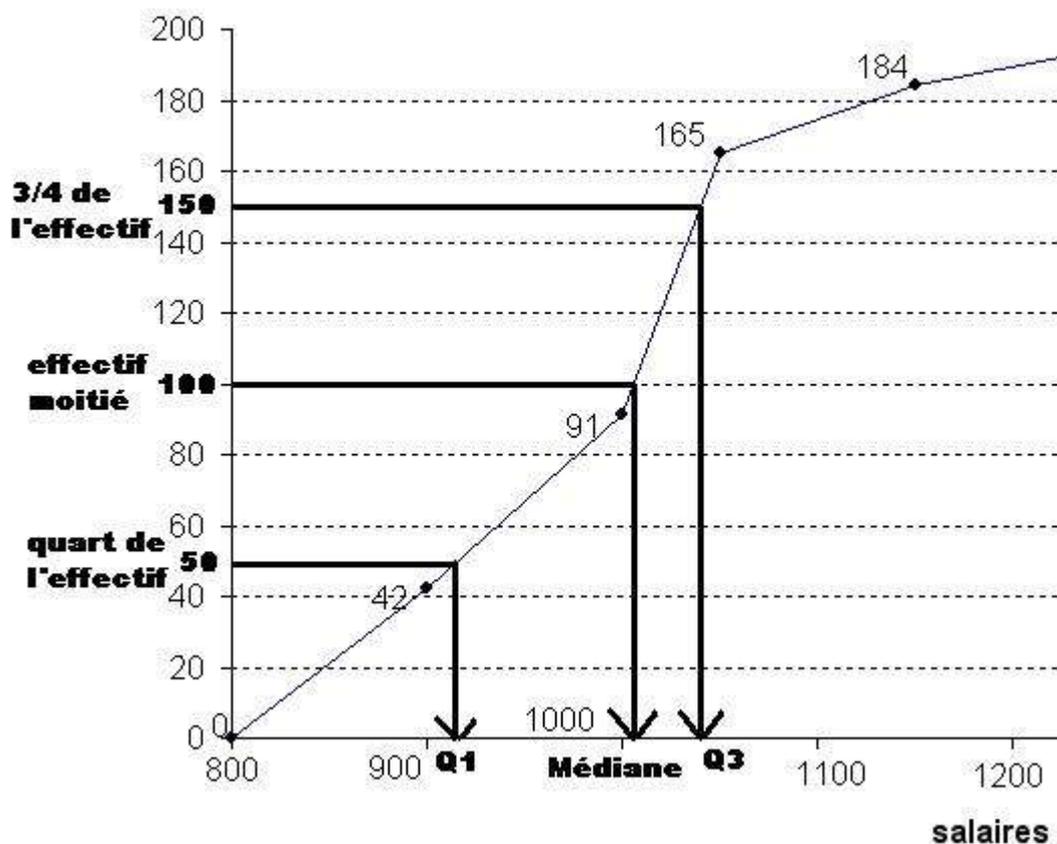
Il s'agit donc du salaire correspondant à un effectif cumulé de 100 salariés (moitié de l'effectif).

On se place ainsi que l'axe des ordonnées à l'effectif cumulé 100, et on lit l'antécédent de 100. Ce sera la médiane.

On procède de même avec les quartiles Q_1 et Q_3 , qui correspondent respectivement à un effectif cumulé de $\frac{1}{4} \times 200 = 50$ et de $\frac{3}{4} \times 200 = 150$.

On lit graphiquement que Médiane ≈ 1010 , $Q_1 \approx 915$ et $Q_3 \approx 1050$.

Effectifs cumulés croissants



3) Calcul précis de la moyenne et des quartiles Q_1 et Q_3

Pour calculer la médiane, on va réaliser une interpolation linéaire entre les points

A (1000 ; 91) et B (1050 ; 165)

L'équation de la droite (AB) est de la forme $y = mx + p$ avec $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{165 - 91}{1050 - 1000} = 1,48$ donc $y = 1,48x + p$.

Pour trouver la valeur de p , on utilise les coordonnées de A (ou B) : $y_A = 1,48x_A + p$ donc $p = y_A - 1,48x_A = 91 - 1,48 \times 1000 = -1389$.

L'équation de (AB) est donc $y = 1,48x - 1389$.

On trouve la médiane en calculant l'antécédent de la moitié de l'effectif (c'est à dire $200/2=100$) par la fonction affine $f: f(x) = 1,48x - 1389$, c'est-à-dire en résolvant l'équation :

$$1,48x - 1389 = 100 \Leftrightarrow x = \frac{1489}{1,48} \approx 1006,08. \text{ Ainsi Médiane} \approx 1006.$$

Puisque le quartile Q_3 semble lui aussi appartenir à l'intervalle $[1000;1050[$, on utilise la même droite, et on résout l'équation :

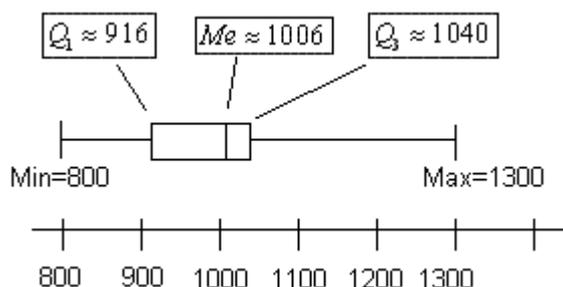
$$1,48x - 1389 = 150 \text{ équivaut à } x = \frac{1539}{1,48} \approx 1039,86. \text{ Ainsi } Q_3 \approx 1040.$$

De la même manière, pour déterminer le quartile Q_1 , on doit déterminer l'équation de la droite reliant les points (900 ; 42) et (1000 ; 91).

Cette droite a pour équation $y = 0,49x - 399$.

Et la résolution de l'équation $0,49x - 399 = 50$ est équivalente à $x = \frac{449}{0,49} \approx 916,33$ ce qui donne : $Q_1 \approx 916$

4) Le diagramme en boîte de la série est donné par :



Exercice 4

Pour le premier diagramme, Max = 100, min = 5, donc l'étendue = $100 - 5 = 95$, $Q_1 = 30$,

Médiane = 45, $Q_3 = 65$.

L'écart interquartile vaut donc $Q_3 - Q_1 = 65 - 30 = 35$.

Pour le deuxième diagramme, Max = 80, min = 10, donc l'étendue = $80 - 10 = 70$, $Q_1 = 35$, Médiane = 45, $Q_3 = 55$.

L'écart interquartile vaut donc $Q_3 - Q_1 = 55 - 35 = 20$.

Pour le troisième diagramme, Max = 95, min = 20, donc l'étendue = $95 - 20 = 75$, $Q_1 = 35$, Médiane = 45, $Q_3 = 65$.

L'écart interquartile vaut donc $Q_3 - Q_1 = 65 - 35 = 30$.

Exercice 5

Comparaison de températures :

1) **Ville de Serbie :**

L'étendue des températures de la ville de Serbie vaut : Max - min = $31 - (-5) = 36^\circ$.

La moyenne des températures de la ville de Serbie est égale à :

$$\bar{x}_s = \frac{-5 - 4 + 4 + 15 + 27 + 31 + 30 + 26 + 20 + 10 - 5}{12} = 15^\circ.$$

La variance des températures vaut :

1^{ère} Méthode de calcul :

$$V_1 = \frac{(-5 - 15)^2 + (-4 - 15)^2 + (4 - 15)^2 + (15 - 15)^2 + (27 - 15)^2 + (31 - 15)^2 + (31 - 15)^2 + \dots + (-5 - 15)^2}{12} = \frac{2334}{12}$$

$$V_1 = 194,5.$$

2^{ème} Méthode de calcul (*méthode pratique de calcul de la variance*)

$$V_1 = \frac{1 \times (-5)^2 + 1 \times (-4)^2 + 1 \times 4^2 + 1 \times 15^2 + 1 \times 27^2 + 1 \times 31^2 + 1 \times 31^2 + \dots + 1 \times (-5)^2}{12} - 15^2 = 194,5$$

L'écart-type des températures vaut donc $\sigma = \sqrt{V_1} = \sqrt{194,5} \approx 13,95$.

Ville de Kosovo :

L'étendue des températures de la ville de Kosovo vaut : $\text{Max} - \text{min} = 19 - (3) = 16^\circ$.

La moyenne des températures de la ville de Kosovo est égale à :

$$\bar{x}_K = \frac{3 + 4 + 7 + 10 + 14 + 17 + 19 + 18 + 16 + 17 + 7 + 6}{12} = 11,5^\circ.$$

La variance des températures vaut :

$$V_2 = \frac{(3 - 11,5)^2 + (4 - 11,5)^2 + (7 - 11,5)^2 + (10 - 11,5)^2 + (14 - 11,5)^2 + (17 - 11,5)^2 + \dots + (6 - 11,5)^2}{12} = \frac{387}{12} = 32,25$$

$$V_2 = \frac{1 \times 3^2 + 1 \times 4^2 + 1 \times 7^2 + 1 \times 10^2 + 1 \times 14^2 + 1 \times 17^2 + 1 \times 19^2 + \dots + 1 \times 6^2}{12} - 11,5^2 = 32,25$$

L'écart-type des températures vaut donc : $\sigma = \sqrt{V_1} = \sqrt{32,25} \approx 5,68$

2) Les calculs précédents permettent d'établir quelques remarques :

- En moyenne il fait plus chaud à Serbie qu'à Kosovo.
- L'étendue des températures est plus forte à Serbie qu'à Kosovo.
- Le climat est plus « modéré » à Serbie qu'à Kosovo car les températures sont moins « étirées » autour de la moyenne.

Exercice 6

1) Afin de calculer la moyenne \bar{x} et l'écart type σ de la série, il faut réorganiser cette série en effectifs :

Note	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total
Effectif	0	0	0	2	2	5	10	9	10	12	10	7	5	5	1	1	0	1	0	0	80

$$\text{On calcule alors : } \bar{x} = \frac{2 \times 4 + 2 \times 5 + \dots + 1 \times 16 + 1 \times 18}{80} = \frac{778}{80} \approx 9,725$$

Puis la variance :

$$\bar{v} = \frac{2 \times (4 - 9,725)^2 + 2 \times (5 - 9,725)^2 + \dots + 1 \times (18 - 9,725)^2}{80} = \frac{619,95}{80} = 7,749375$$

Donc l'écart-type $\sigma = \sqrt{7,749375} \approx 2,78$

2) L'intervalle : $[\bar{x} - \sigma ; \bar{x} + \sigma] = [9,725 - 2,78 ; 9,725 + 2,78] = [6,945 ; 12,505]$ contient 58 notes, soit un pourcentage égal à : $\frac{58}{80} \times 100 = 72,5\%$.

Environ 27,5 % des notes sont donc en dehors de cet intervalle.

L'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma ; \bar{x} + 2\sigma] = [9,725 - 2 \times 2,78 ; 9,725 + 2 \times 2,78]$

$= [4,165 ; 5,285]$ cet intervalle contient 76 notes, soit un pourcentage égal à $\frac{76}{80} \times 100 = 95\%$. Environ 5 % des notes sont en dehors de cet intervalle. L'échantillon de notes est "normal".

Exercice 7

1) et 2) Les calculs fournissent :

$m_1 = 35$, $s_1 = 1,604$ ainsi que $m_2 = 35$, $s_2 = 2,507$ et $m_3 = 34$, $s_3 = 1,414$.

La moyenne générale $\bar{m} = 34,7$ et l'écart-type de la distribution des 20 notes vaut $\bar{s} = 1,977$.

3) Pour les fonctionnaires du groupe 1 ; $\bar{n} = 34,7 + \left(\frac{n-35}{1,604}\right) \times 1,977$.

Pour les fonctionnaires du groupe 2 ; $\bar{n} = 34,7 + \left(\frac{n-35}{2,507}\right) \times 1,977$.

Pour les fonctionnaires du groupe 3 ; $\bar{n} = 34,7 + \left(\frac{n-35}{1,414}\right) \times 1,977$.

3) Les nouvelles notes sont :

Fonctionnaire	A	B	C	D	E	F	G
Note harmonisé	38,397	35,932	35,932	33,467	33,467	33,467	32,235
Fonctionnaire	H	J	K	L	M	N	P
Note harmonisé	37,066	36,277	35,489	35,489	34,7	33,123	30,757
Fonctionnaire	Q	R	S	T	V	W	
Note harmonisé	37,496	36,098	36,098	34,342	34,342	31,904	

Les fonctionnaires promus sont donc A, B, V, H, J, Q, R, S.
