SECTION MATHS

CORRIGÉ DU SUJET DE MATHS
BAC 2015 SESSION PRINCIPALE
PROPOSÉ PAR M^r SALAH HANNACHI

EXERCICE N1 :

1) a) (E) : $z^2-2z+4=0 \quad \Longrightarrow \quad (a=1\ ,\ b'=-1\ ,\ c=4)$

$\Delta'=(b')^2-ac=(-3)=(\sqrt{3}.i)^2$. On pose alors $\delta=\sqrt{3}.i$ une racine carrée de Δ'. Donc les solutions de l'équation (E) sont :

$z'=\frac{-b'+\delta}{a}=1+\sqrt{3}.i$ et $z''=\overline{z'}=1-\sqrt{3}.i$ Donc $S_{\mathbb{C}}=\{1+\sqrt{3}.i\,,1-\sqrt{3}.i\}$

b) $z'=1+\sqrt{3}.i=2.e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z''=1-\sqrt{3}.i=2.e^{-i\frac{\pi}{3}}$

2) Voir la figure ci-dessous.

3) Soit $M(2.e^{i\theta})$; $\theta\in]-\pi,\pi]$ et N le point de (Γ) tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{ON}}\right)\equiv\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right)[2\pi]$

$\equiv\theta+\frac{\pi}{3}[2\pi]$. On a de plus ON=2 car N∈ (Γ). Alors

N a pour affixe $2.e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})}$

4) a) Soit la rotation $r=r(A,\frac{\pi}{3})$. Alors $r: M(z)\longmapsto M'(z')$ tel que $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}.z+b$ avec b est le complexe

tel que : $z_A=\frac{b}{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}$ cela signifie que $b=z_A(1-e^{i\frac{\pi}{3}})=2-2e^{i\frac{\pi}{3}}$ D'où $\boxed{z'=e^{i\frac{\pi}{3}}.z+2-2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

b) F=B∗M et K=C∗N alors $F(\frac{z_B+z_M}{2})$ et $K(\frac{z_C+z_N}{2})$ donc $F(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\theta})$ et $K(e^{-i\frac{\pi}{3}}+e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})})$

D'autre part : $e^{i\frac{\pi}{3}}.(z_F)+2-2e^{i\frac{\pi}{3}}=$

$$e^{i\frac{\pi}{3}}.(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\theta})+2-2e^{i\frac{\pi}{3}}=e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})}+2-2e^{i\frac{\pi}{3}}=e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})}+e^{-i\frac{\pi}{3}}(e^{i\pi}+2e^{i\frac{\pi}{3}}-2e^{i\frac{2\pi}{3}})$$

$$=e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})}+e^{-i\frac{\pi}{3}}(-1+1+\sqrt{3}.i+1-\sqrt{3}.i)=e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})}+e^{-i\frac{\pi}{3}}=z_K$$

D'où $\boxed{r(F)=K}$

c) r(F)=K équivaut à $\begin{cases} AF=AK \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AK}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$ équivaut à dire que le triangle AFK est équilatéral direct.

5) a) $AF^2=|z_F-z_K|^2=\left|e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\theta}-e^{-i\frac{\pi}{3}}-e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})}\right|^2=\left|e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}+e^{i\theta}-e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})}\right|^2$

$=\left|e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}+e^{i\theta}-e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})}\right|^2=\left|i\sqrt{3}+e^{i(\theta+\frac{\pi}{6})}(e^{-i\frac{\pi}{6}}-e^{i\frac{\pi}{6}})\right|^2=\left|i\sqrt{3}-i.e^{i(\theta+\frac{\pi}{6})}\right|^2$

$=\left|\sqrt{3}-e^{i(\theta+\frac{\pi}{6})}\right|^2=\left|\sqrt{3}-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right|^2$

$=\left(\sqrt{3}-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right)^2+\left(\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right)^2=\boxed{4-2\sqrt{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}$

b) AF est maximale

équivaut à dire que $4-2\sqrt{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ est maximale

équivaut à dire que $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-1$

équivaut à dire que $\theta+\frac{\pi}{6}=\pi$ (car $\theta\in]-\pi,\pi]$)

équivaut à dire que $\theta=\frac{5\pi}{6}$

D'où M est d'affixe $(2.e^{i\frac{5\pi}{6}})$.

EXERCICE N2 :

1) f est la similitude directe de centre A qui envoie B sur C. Alors :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $k=\frac{AC}{AB}=\tan(\widehat{ABC})=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$. Donc f est d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $k=\sqrt{3}$

2) g est la similitude indirecte de centre A qui envoie C sur B.

a) $k'=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) L'axe Δ de g est la droite qui porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$

c) On a : g(C)=B et on pose g(B)=B', alors gog(C)=B'. Or gog est l'homothétie $h_{\left(A,\frac{1}{3}\right)}$, alors on obtient :

$\overrightarrow{AB'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, et comme $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ alors B'=D. D'où g(B)=D.

* On sait que g(C)=B , g(B)=D et g(A)=A et que g est une bijection dont on notera g^{-1} la similitude réciproque alors : $g^{-1}(B)=C$, $g^{-1}(D)=B$ et $g^{-1}(A)=A$.

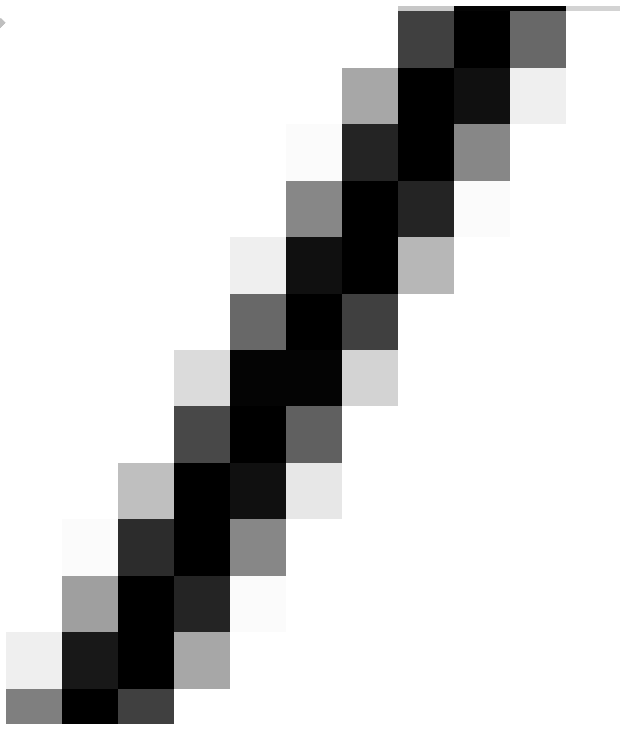
Et comme toute similitude conserve les angles géométriques, alors : $\widehat{ABD}=\widehat{ACB}$. Donc $\widehat{ABD}=\frac{\pi}{6}$

D'où $\widehat{ABD}=\frac{\widehat{ABC}}{2}$ et par la suite [BD) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$.

3) a) fog est une similitude indirecte de rapport k.k'=1 alors fog est un antidéplacement.
De plus , fog(A)=A et fog(C)=f(B)=C , alors fog fixe deux points distincts du plan donc fog est la symétrie axiale d'axe (AC).

b) On a : D'=f(D) cela signifie que D'=fog(B).Alors $S_{(AC)}(B)=D'$, et comme (AC)⊥(AB), alors $D'=S_A(B)$

4) On a : f(B)=C et f(D)=D' alors f((BD))=(CD').
D'autre part : f(Δ)=(AJ), en effet : A ∈ Δ, alors f(Δ) est la droite passant f(A)=A est perpendiculaire à Δ.
Or (Δ)⊥(AJ) (deux bissectrices intérieures de deux angles adjacents et supplémentaires), alors f(Δ)=(AJ).
On a : I ∈ Δ ∩ (BD) alors f(I) ∈ f(Δ) ∩ f((BD)), cela signifie que f(I) ∈ (AJ) ∩ (CD'). D'où f(I)=J



EXERCICE N3 :

1) (E) : $47x + 53y = 1$

a) 47×(-9)+53×8=-423+424=1, alors (-9,8) est une solution de (E).

b) (-9,8) est une solution de (E) équivaut à $47x + 53y = 47 \times (-9) + 53 \times 8$

équivaut à $47(x + 9) = 53(8 - y)$

alors 53 divise $47(x + 9)$. Or $53 \wedge 47 = 1$ alors d'après le lemme de Gauss 53 divise $(x + 9)$.

D'où il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 53k - 9$. Par conséquent $47(53k - 9 + 9) = 53(8 - y)$

cela signifie que $y = 8 - 47k$.

Par la suite : si (x, y) est une solution de (E) alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 53k - 9$ et $y = 8 - 47k$.

<u>Réciproquement</u> : Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 53k - 9$ et $y = 8 - 47k$.

$47(53k - 9) + 53(8 - 47k) = -47 \times 9 + 53 \times 8 = 1$. Alors $(53k - 9, 8 - 47k)$ est une solution de (E).

c) Si x est un inverse de 47 modulo 53 alors $47x \equiv 1 (\mathrm{mod} 53)$. Donc il existe un entier y tel que :

$47x = 1 + 53y$ ci qui implique que $47x + 53(-y) = 1$. D'où $(x, -y)$ est une solution de (E).

En particulier $x = 53k - 9$ où $k \in \mathbb{Z}$

<u>Réciproquement :</u> $(53k - 9)47 \equiv -9 \times 47 \ (\mathrm{mod} 53)$

$\equiv -9 \times (-6) \ (\mathrm{mod} 53)$

$\equiv 1 \ (\mathrm{mod} 53)$

<u>Ainsi</u> : l'ensemble des inverses de 47 modulo 53 est $I = \{53k - 9 \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$

d) $53k - 9 > 0$ équivaut à $k > \frac{9}{53}$ alors $k \geq 1$.

Donc $(53k - 9)$ est strictement positif et minimal si et seulement si k=1. D'où $53 \times 1 - 9 = 44$ est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53.

2) a) 53 est un entier premier ne divisant pas 45 alors d'après le théorème de Fermat :

$45^{53-1} \equiv 1 (\mathrm{mod} 53)$ et par la suite $45^{52} \equiv 1 (\mathrm{mod} 53)$

b) $45^{52} \equiv 1 (\mathrm{mod} 53)$ alors $(45^{52})^2 \equiv 1 (\mathrm{mod} 53)$ signifie que $45^{104} \equiv 1 (\mathrm{mod} 53)$

signifie que $45^{106} \equiv 45^2 (\mathrm{mod} 53)$

signifie que $45^{106} \equiv (-8)^2 (\mathrm{mod} 53)$

signifie que $45^{106} \equiv 11 (\mathrm{mod} 53)$

3) a) $N = 1 + 45 + 45^2 + \ldots + 45^{105}$

$N = 1.\frac{45^{106} - 1}{45 - 1}$ (somme des termes consécutifs d'une suite géométrique)

Alors $44N = 45^{106} - 1$

Or $45^{106} \equiv 11 (\mathrm{mod} 53)$ alors $45^{106} - 1 \equiv 10 \ (\mathrm{mod} 53)$. D'où $44N \equiv 10 \ (\mathrm{mod} 53)$.

b) On a : $44N \equiv 10 \ (\mathrm{mod} 53)$ équivaut à $47 \times 44N \equiv 470 \ (\mathrm{mod} 53)$

équivaut à $N \equiv 46 \ (\mathrm{mod} 53)$

EXERCICE N4 :

$f(x) = e^{\sin x}$; $x \in [0, \pi]$

1) a) ∗ $f'(x) = \cos x \, e^{\sin x}$

∗ $f'(x) = 0$ équivaut à $\cos x = 0$ équivaut à $x = \frac{\pi}{2}$ (car $x \in [0, \pi]$)

∗ Le signe de $f'(x)$ est celui de $\cos x$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		+	0	−	
f	1	↗	e	↘	1

b) Soit $x \in [0,\pi]$, alors : $\begin{cases} \pi - x \in [0,\pi] \\ f(\pi - x) = e^{\sin(\pi - x)} = e^{\sin x} = f(x) \end{cases}$

Donc la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de C_f

c) T : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ signifie que T : $y=x+1$

2) $g(x)=e^x\sqrt{1-x^2}-1$; $x \in [0,1]$

x	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	1
$g'(x)$	$+$	0	$-$
g	$0 \nearrow$	$g(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$	$\searrow -1$

a) $* \; g\left(\left]0,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]\right) = \left]0, g(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})\right]$ ne contient pas 0.

Alors l'équation $g(x)=0$ n'a pas de solutions dans $\left]0,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$

$*$ g est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right[$

Alors g réalise une bijection de $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right[$ sur $g\left(\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right[\right) = \left]-1, g(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})\right]$

$0 \in \left]-1, g(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})\right]$ car $g(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) > 0$ alors l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right[$.

Et par la suite α est l'unique solution de l'équation $g(x)=0$ dans $]0,1[$.

b)

x	0		α		1
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	

3) $h(x) = e^{\sin x} - (x+1)$; $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

a) Pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \in [0,1]$.

$h'(x) = \cos x \, e^{\sin x} - 1 = e^{\sin x}\sqrt{1-(\sin x)^2} - 1$, $(\cos x \geq 0)$

$= g(\sin x)$

b) La fonction sin est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin 0 \leq \alpha \leq \sin\frac{\pi}{2}$ (car $\alpha \in [0,1]$)

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel $\beta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\beta = \alpha$

de plus la fonction sin est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ alors β est unique dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

c) $\sin([0,\beta])=[\sin 0,\sin\beta]=[0,\alpha]$ et $\sin([\beta,\frac{\pi}{2}])= [\sin\beta,\sin\frac{\pi}{2}]=[\alpha,1]$

d) $h'(x)=0$ équivaut à $g(\sin x)=0$

équivaut à $\sin x=0$ ou $\sin x=\alpha$

équivaut à $x=0$ ou $x=\beta$

x	0		β		$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0		α		1
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	$e^{\alpha}-\beta-1$	$\searrow$	$e-\frac{\pi}{2}-1$

e) Pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a : $h(x) \geq 0$ car $e - \frac{\pi}{2} - 1 \geq 0$

d'où $f(x) \geq x+1$

$*$ Pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ la courbe C_f est située au dessus de la droite (T).

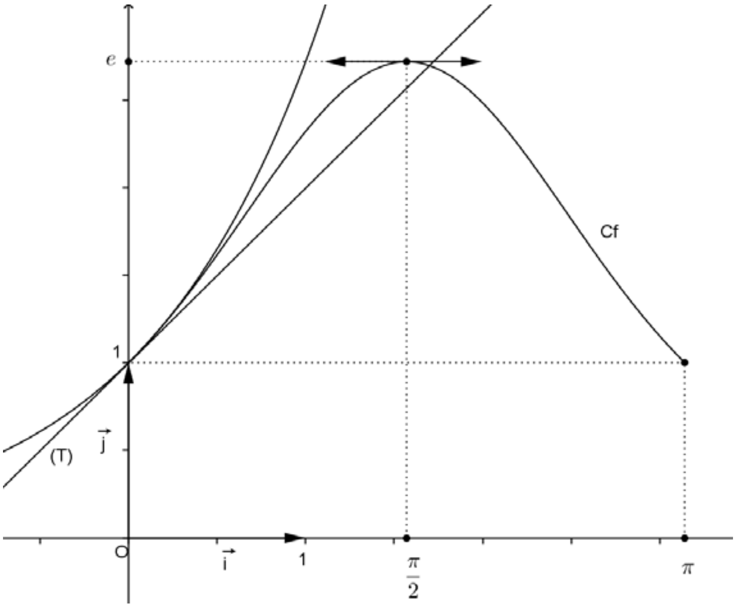
II/ 1) a) $\forall$ x $\in$ IR On a : cosx $\leq$ 1. Alors $\forall$ x $\geq$ 0 on a : $\int_0^x \cos t\, dt \leq \int_0^x dt$

Cela signifie que sinx $\leq$ x $\forall$ x $\geq$ 0

b) $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a : sinx $\leq$ x alors $e^{\sin x} \leq e^x$ (car la fonction exp est croissante sur IR)

D'où $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $f(x) \leq e^x$

c) Voir le graphique suivant :



2) a) $*$ On a : $f(x) \leq e^x \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors $\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 e^x dx$. D'où $\int_0^1 f(x)dx \leq e - 1$

$*$ On a : $f(x) \leq e \quad \forall x \in [0, \pi]$. Alors $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \leq \int_1^{\frac{\pi}{2}} e\, dx$. D'où $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \leq e\,(\frac{\pi}{2} - 1)$

b) $A = \int_0^{\pi} |f(x)|\, dx = \int_0^{\pi} f(x)\, dx = 2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx + 2\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \leq e\pi - 2$

D'autre part $f(x) \geq x+1 \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \geq 2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)dx$

Cela signifie que $A \geq 2\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ d'où $A \geq \frac{\pi^2}{4} + \pi$

Et par la suite $\frac{\pi^2}{4} + \pi \leq A \leq e\pi - 2$