

Exercice n°1 : (7 points)

Une urne contient huit jetons indiscernables au toucher répartis comme suit :

- **Quatre** blancs numérotés 1 ; 1 ; 2 ; 2
- **Trois** noirs numérotés 1 ; 1 ; 2
- **Un** jaune numéroté -1

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux jetons de l'urne.

1) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Obtenir deux jetons de même couleur ».

B : « Obtenir deux jetons dont le produit des numéros est négatif ».

2) Montrer que $p(A \cup B) = \frac{4}{7}$

3) Soit X l'aléa numérique qui à chaque épreuve associe le produit des deux numéros inscrits sur les jetons tirés.

a- Vérifier que $p(X = -1) = \frac{1}{7}$.

b- Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

X_i	-2	-1	1	2	4
$p(X=X_i)$		$\frac{1}{7}$			

c- Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice n°2 : (6 points)

Soit (V_n) la suite géométrique de premier terme $V_0 = \frac{1}{6}$ et de raison $\frac{1}{4}$.

1) a) Exprimer V_n en fonction de n .

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

2) Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = -\frac{23}{6} \\ U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n - 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > -4$.

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = -\frac{3}{4}(4 + U_n)$.

- c) En déduire que la suite (U_n) est décroissante et qu'elle est convergente.
- 3) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n - U_n = 4$.
- b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice n°3 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$, par : $f(x) = \log(x) - \frac{3}{x}$. on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $((O, \vec{i}, \vec{j}))$.

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
- 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
 b) En déduire la nature de la branche infinie de la courbe (C) au voisinage $+\infty$
- 3) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{x+3}{x^2}$
 b) dresser alors le tableau de variation de f
- 4) a) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$; admet une unique solution $\alpha \in]0, +\infty[$.
 b) Justifier que : $2,8 < \alpha < 2,9$.
- 5) Tracer la courbe (C) .
- 6) Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$, par $F(x) = (x-3)\log(x) - x$
 a) Calculer $F(3)$.
 b) Montrer que F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.
 c) En déduire l'aire de la partie limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = \alpha$ et $x = 3$.