Lycée Kairouan | $4^{ème}$ MATHS
Prof : Mejri Adel | Epreuve : Mathématiques
MAI 2016 | Durée : 4heures

BAC BLANC

Exercice n°1 (4points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ On considère les points A(1, 0, 0) , B(0, 0, 1) et C(1, -1, 1)

1) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P=(ABC) est : x + y + z – 1 = 0
2) Soit (S) l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que :
   $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$
   a-/ Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R
   b-/ Montrer que $S \cap P$ est le cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC
3) a-/ Montrer que les points A, B, C et I ne sont pas coplanaires
   b-/ Calculer le volume du tétraèdre IABC.
   c-/ Soit a un réel et soit M (a, 0, 2 – a) un point de l'espace
   Montrer que, lorsque a décrit l'ensemble $\mathbb{R}$, le volume du tétraèdre MABC reste constant
4) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport -2
   a-/ Ecrire l'expression analytique de h
   b-/ Déterminer $S_1 = h(S)$
   c-/ Déterminer alors $S_1 \cap P$

Exercice n°2 (3 points)

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : 143 x – 195 y = 52

1) a-/ Déterminer pgcd (143, 195) et en déduire que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$
   b-/ Vérifier que (-1,-1) est une solution particulière de l'équation (E).
   c-/ Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)
2) Soit n un entier naturel non nul et premier avec 5
   Montrer que pour tout entier naturel k on a : $n^{4k} \equiv 1 \ (\text{mod } 5)$
3) Soit x et y deux entiers non nuls tels que $x \equiv y \ (\text{mod } 4)$
   a-/ Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $n^x \equiv n^y \ (\text{mod } 5)$
   b-/ En déduire que pour tout entier naturel non nul n on a : $n^x \equiv n^y \ (\text{mod } 10)$
4) Soit x et y deux entiers naturels tels que (x, y) est une solution de l'équation (E)
   Montrer que pour tout entier naturel non nul n, n^x et n^y ont le même chiffre des unités

Exercice n°3 (7 points)

I-/ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et f(0)=0

1) a-/ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$

   b-/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

2) Dresser le tableau de variation de f

3) En utilisant la courbe représentative de la fonction exponentielle construire le point de C_f d'abscisse 1 puis tracer C_f (Annexe 1)

II-/ soit F la fonction définie par $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et F(0) = 0

1) a-/ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(2)\, e^{-\frac{1}{x}} \leq F(x) \leq \ln(2) e^{-\frac{1}{2x}}$

   b-/ En déduire $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

   c-/ Montrer que F est continue à droite en 0

   d-/ Etudier la dérivabilité de F à droite en 0.

2) a-/Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F'(x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2x}}\left(1 - e^{-\frac{1}{2x}}\right)$

   b-/ Dresser le tableau de variation de F

3) a-/ Montrer que l'équation $F(x) = \frac{n}{n+1}\ln(2)$ admet une unique solution $a_n \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout n $n \in \mathbb{N}^*$

   b-/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \leq e^{-\frac{1}{a_n}} \leq \frac{n}{n+1}$

   En déduire $\lim_{n \to +\infty} a_n$

4) a-/Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq S_n \leq 2\ln(n+1)$

   b-/ Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^k}$ où $k \in \mathbb{N}^*$

Exercice n°4 (3 points)

Une entreprise fabrique des puces électroniques qui sont utilisées pour des matériels aussi différents que des téléphones portables, des lave-linge ou des automobiles. A la sortie de fabrication, 5% d'entre elles présentent un défaut et sont donc éliminées. Les puces restantes sont livrées aux clients.

On dit qu'une puce a une durée de vie courte si cette durée de vie est inférieure ou égale à 1000 heures. On observe 2% des puces livrées ont une durée de vie courte

On note L l'évènement « La puce est livrée »

On note C l'évènement « La puce a une durée de vie courte c'est-à-dire inférieure ou égale à 1000 heures »

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1) On tire au hasard une puce fabriquée par l'entreprise.
   a-/ Donner la valeur p(C/L).
   b-/ Quelle est probabilité que la puce soit livrée et ait une durée de vie strictement supérieure à 1000 heures ?
   c-/ Quelle est la probablilité que la puce soit éliminée ou ait une durée de vie courte à la sortie de la chaine de fabrication ?

Dans la suite de l'exercice on s'intéresse seulement aux puces livrées aux clients.

2) On appelle X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie en heures d'une telle puce.

On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ

a-/ Montrer que $\lambda = \dfrac{-\ln(0,98)}{1000}$

b-/ Calculer la probabilité qu'une puce ait une durée de vie supérieure à 10000 heures. On orondira le résultat à 10^{-3}près.

3)Les ingénieurs de l'entreprise ont mis au point un nouveau procédé de fabrication. On suppose qu'avec ce nouveau procédé la probabilité qu'une puce livrée donnée ait une durée de vie courte est égale à 0,003.

On prélève au hasard 10 puces prêtes à être livrées

Calculer la probabilité pour qu'au moins une puce livrée ait une durée de vie supérieure strictement à 1000 heures

Exercice n°5 (3 points)

On a recensé, dans un pays, les dépences en dinars des ménages en produits informatiques et téléphoniques de l'année 2006 jusqu'à l'année 2015

Le tableau ci-dessous donne ces dépences y (en 10^3 dinars) suivant le rang de l'année x

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Rang de l'année (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dépenses (en 10^3 dinars) (y)	580	460	340	500	750	1030	1350	1650	1900	2200

1) a-/ Calculer le coefficient de corrélation r de la série (x,y). interpréter

   b-/ Déterminer une équation de la droite de regression de y en x par la méthode des moindres carrées

   c-/ En utilisant l'ajustement de cette série, donner une prévision des dépenses des ménages pour l'année 2020

2) On pose z = ln(y) et on obtient le tableau suivant :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z	6.36	6.13	5.83	6,21	6,62	6,94	7,21	7,41	7,55	7,7

   a-/ Calculer le coefficient de corrélation r de la série (x,z).

   b-/ Ecrire une équation de la droite de regression de z en x par la méthode des moindres carrées (les coefficients de la droite seront arrondis au centième)

   c-/Montrer que $y = 295{,}89\, e^{0{,}2\, x}$

   d-/ En utilisant cet ajustement, donner une prévision des dépenses des ménages pour l'année 2020