

Exercice N°1 (5pts)

On considère les nombres F_n définies par $F_n = 2^{2^n} + 1$ $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer F_0, F_1, F_2, F_3, F_4
2. Vérifier que $641 = 5 * 2^7 + 1 = 5^4 + 2^4$
3.
 - a. Montrer que $5 * 2^7 \equiv -1[\text{mod}641]$; $5^4 * 2^{28} \equiv 1[\text{mod}641]$ et $5^4 \equiv -2^4[\text{mod}641]$
 - b. Dédire $2^{32} + 1 = F_5$ est divisible par 641
4.
 - a. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$ $2^{2^n} \equiv 6[\text{mod} 10]$
 - b. Dédire le chiffre des unités de $F_n, n \geq 2$
5.
 - a. Montrer que $\frac{F_{n+1}-2}{F_n} = F_n - 2$
 - b. Soit $d = F_{n+1} \wedge F_n$. Montrer que d divise 2
 - c. Montrer que $d = F_{n+1} \wedge F_n = 1$
6.
 - a. Déterminer un couple $(\alpha; \beta)$ tel que $\alpha F_3 + \beta F_2 = 1$
 - b. Dédire la résolution dans $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ de $257x + 17y = 1$

Exercice N°2 (5pts)

Le but de problème est de déterminer le prix d'équilibre d'un produit (**on rappelle que prix d'équilibre d'un produit est obtenu lorsque l'offre et la demande sont égales**)

Une étude faite sur ce produit a donné les résultats suivants (le prix au kg est exprimé en DT et les quantités offre et demande sont exprimées en milliers de kg)

| | | | | | | |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|
| Prix proposé x_i | 0.30 | 0.35 | 0.45 | 0.65 | 0.80 | 1 |
| Demande y_i | 6.25 | 4.90 | 3.75 | 2.75 | 2.40 | 2.25 |
| Offre z_i | 1.24 | 1.30 | 1.30 | 1.50 | 1.55 | 1.60 |

Tous les résultats numériques seront donnés en valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près

Le plan est rapporté au repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unités graphiques 10 cm pour 1 DT en abscisse et 2 cm pour 1 millier de kg en ordonné

Représenter sur le même graphique les nuages de points associées respectivement aux séries statistiques $(x_i; y_i)$ et $(x_i; z_i)$

Pour ces représentations figurer par des signes différents les points du nuage de points $(x_i; y_i)$ et $(x_i; z_i)$ respectivement.

ETUDE DE LA DEMANDE

On pose $Y_i = \ln y_i$

- a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i; Y_i)$. un ajustement affine par la méthode de moindres carrés de Y en x est-il satisfaisant ? Pourquoi .

- b. Donner alors une équation de la droite de régression de Y en x sous la forme $Y=ax+b$
 En déduire en utilisant l'égalité $Y=\ln y$ une estimation de la demande de y en fonction de x prix au kg

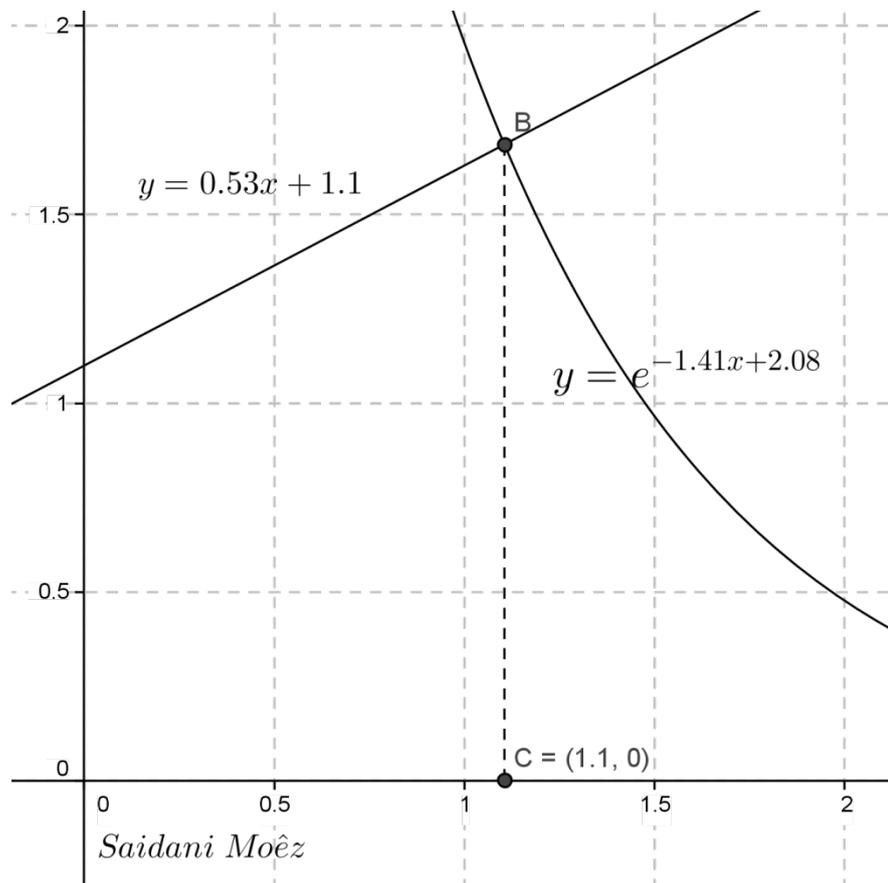
ETUDE DE L'OFFRE

La forme du nuage de points associé à la série $(x_i ; z_i)$ permet d'envisager un ajustement affine de z en x

- a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i ; z_i)$.Un ajustement affine par la méthode de moindre carré de z en x est-il satisfaisant ? pourquoi ?
 b. Donner alors une équation de la droite de régression de z en x sous la forme $z=mx+p$

ETUDE GRAPHIQUE DE PRIX D'EQUILIBRE

La demande et l'offre sont formalisées par les fonctions f et g définies sur $[0; 2]$ par $f(x) = e^{-1.41x+2.08}$ et $g(x) = 0.53x + 1.1$ dont les représentations graphiques sont ci-dessous



Quel est le prix d'équilibre de ce produit d'après le graphique

ETUDE NUMERIQUE DU PRIX D'EQUILIBRE

On considère la fonction h définie sur $[0; 2]$ par $h(x) = f(x) - g(x)$

- a. Déterminer le sens de variation de h sur $[0; 2]$ et dresser le tableau de variation
 b. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0; 2]$
 Donner une valeur approchée décimale à 10^{-1} près. Quel est le prix d'équilibre du produit considéré ?

Exercice N°3 (5pts)

Le service après vente d'une entreprise , vendant une certaine marque de calculatrice, s'est aperçu que ces dernières pourraient présenter deux types de défaut ,l'un lié au clavier, l'autre lié à l'affichage .Des études statistiques ont permis à l'entreprise d'utiliser la modélisation suivante :

La probabilité pour une calculatrice tirée au hasard de présenter un défaut de clavier est égale à 0.04 En présence du défaut de clavier , la probabilité que la calculatrice soit en panne d'affichage est 0.03

Alors qu'en absence de défaut de clavier , la probabilité de ne pas présenter de défaut est de 0.94

On note C l'événement : « la calculatrice présente un défaut de clavier »

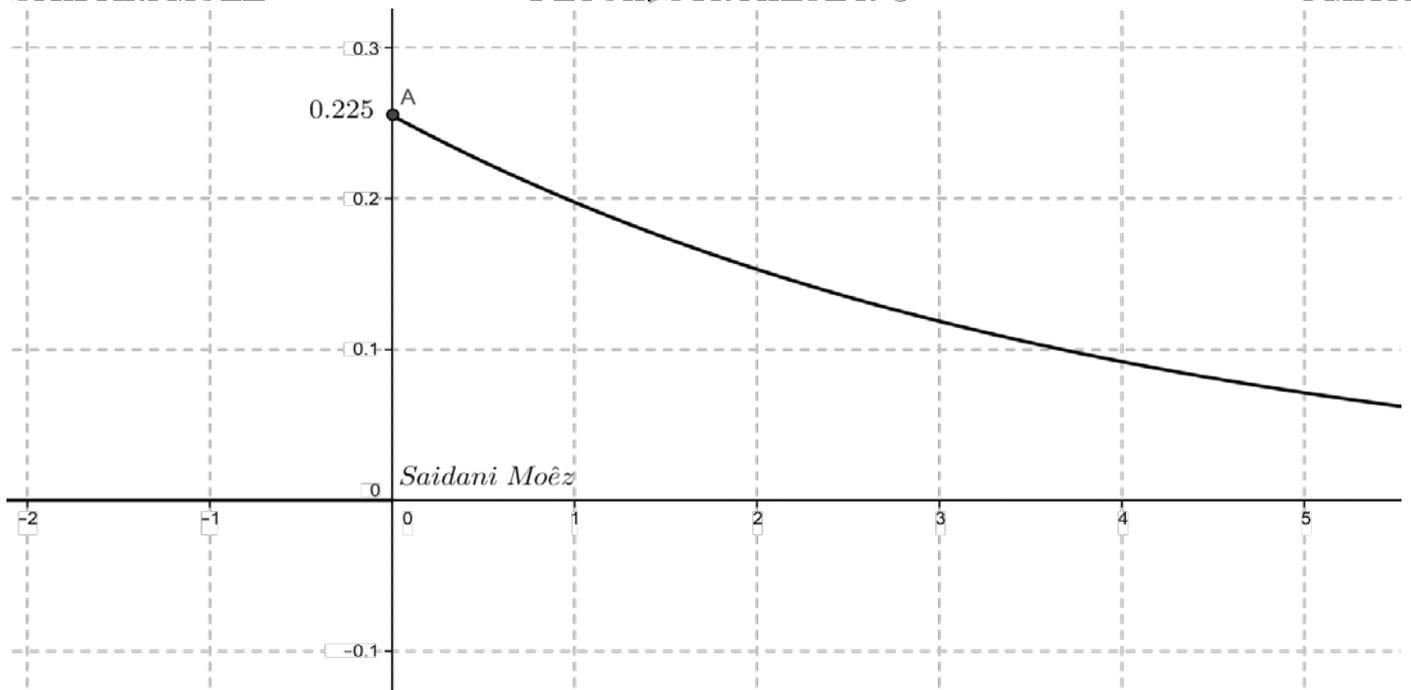
A l'événement « la calculatrice présente un défaut d'affichage »

Les résultats du calcul des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près

1.
 - a. Calculer $P(A/C)$, $P(A/\bar{C})$ et $P(C)$
 - b. Construire un arbre pondéré décrivant la situation
2. On choisit une calculatrice de cette marque au hasard
 - a. Calculer la probabilité que la calculatrice présente deux défaut
 - b. Calculer la probabilité que la calculatrice présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de clavier
 - c. Déduire $p(A)$
 - d. Montrer que la probabilité que la calculatrice ne présente aucun défaut est 0.9024
3. Le prix de vente d'une calculatrice est fixé à 35 D et le service après vente s'engage à prendre en charge les réparations en cas de présence d'un défaut
 - Si la calculatrice présente un défaut de clavier ,le coût de réparation est de 3 DT
 - Si la calculatrice présente un défaut d'affichage ,le coût de réparation est de 5 DT
 - Si la calculatrice présente les deux défauts alors le client récupère ses 35 DT et garde la calculatrice

Soit X la variable aléatoire égale au prix de vente réel d'une calculatrice (après réparation si c'est nécessaire)

- a. Déterminer la loi de X
 - b. Calculer alors le prix de vente d'une calculatrice que peut espérer l'entreprise
4. On suppose que la durée de vie (exprimée en années) d'une calculatrice de cette marque suit la loi exponentielle) dont la fonction densité de probabilité est donnée ci – dessous



- a. D'après le graphique déterminer
- Le paramètre λ
 - Vérifier que $P(X \leq 1) > 0.2$ (sans faire de calcul)
 - Exprimer au sens d'aire $P(1 \leq X \leq 2)$
- b.
- Calculer $P(X \leq 1)$
 - Calculer $P(X \geq 5)/X \geq 2$
 - Calculer l'espérance de vie de cette calculatrice au mois près

Exercice N°4 (5pts)

On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}}$

- Montrer que φ est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
 - Montrer que pour tout $t \geq 0$ on a : $\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \geq \frac{1}{2t+1}$
 - En déduire que pour tout $x \geq 0$ $\varphi(x) \geq \frac{\ln(1+2x)}{2}$. déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$
 - On admet que φ est une fonction impaire. Montrer que φ est bijective de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . on désigne par ψ la réciproque de φ
- Soit l'équation différentielle : $y' = \sqrt{1+y^2}$ (E)
 - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\psi'(x) = \sqrt{1+\psi^2(x)}$
 - Calculer $\psi(0)$ et déduire $\psi'(0)$
 - Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\psi(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x})$ est une solution de (E)
 - Evaluer $h(x) = \frac{1}{2} \ln(2\psi(x) + \sqrt{1+4\psi^2(x)})$ en déduire l'expression de $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$

BON COURAGE

