Lycées Houmet Souk 1 & 2 *Profs: Loukil . M & Zayoud . A*	*Devoir de Synthèse N : 3* *Durée : 4 Heures*	*4 Mathématique* *10 Mai 2012*

EXERCICE N : 1 (3 points)

Le tableau ci-dessous, donne la dépense en millions de dinars des ménages en produits informatiques

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang x_i en année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dépense y_i	381	451	523	601	673	753	828	896	964	1039

(les calculs seront arrondis à 10^{-2} près)

A) 1) Construire ,dans un repère orthogonal ,le nuage de points $M_i(x_i , y_i)$ de la série double (X , Y).

(**1 cm** pour un rang en abscisse et **1 cm** pour 200 millions de Dinars en ordonnée)

2) a) Peut-on justifier un ajustement affine de la série considérée ?

b) Calculer les coordonnées du point moyens **G** .

3) $\mathbf{N_1}$ désigne le nuage des points M_1 , M_2 ,M_3 ,M_4 et M_5 . $\mathbf{N_2}$ désigne le nuage des points restants.

a) Calculer les coordonnées des points moyens $\mathbf{G_1}$ et $\mathbf{G_2}$ associés respectivement à $\mathbf{N_1}$ et $\mathbf{N_2}$

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite $(\mathbf{G_1 G_2})$ de Mayer .

B) 1) a) Calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire du couple (**X , Y**) .

b) Interpréter le résultat obtenu .

c) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ de régression de **Y** en **X** .

2) Donner une estimation par **la méthode de Mayer** puis celle **des moindres carrés** des dépenses de l'année 2012 .

3) En utilisant la méthode **des moindres carrés** , estimer l'année pour laquelle les dépenses dépasseront 1500 millions de Dinars .

EXERCICE N : 2 (3 points)

A) *Une urne* U_1 *contient 2 jetons numérotés 1 et 2 .*
Une urne U_2 *contient 4 jetons numérotés 1 , 2 , 3 et 4 .*

On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne .

1) *Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?*

2) *On a tiré un jeton portant le numéro 1 , quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne* U_1 *?*

B) *On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents.*
On tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont équiprobables.

1) *Calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques.*

2) *Soit* **S** *la variable aléatoire qui, à chaque tirage associe la somme des numéros des 2 jetons tirés.*

Déterminer la loi de probabilité de **S** *.*

C) *Deux joueurs, Hazem et Rayen , décident que si la somme des numéros tirés est impair ,*
Hazem donne 10 Dinars à Rayen et que dans le cas contraire Hazem reçoit λ *Dinars de Rayen .*

On note X la variable aléatoire qui , à chaque tirage associe le gain algébrique de Hazem .

1) *Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de* λ *.*

2) *Déduire la valeur de* λ *pour laquelle le jeu soit équitable .*

EXERCICE N : 3 (4 points)

Dans un plan orienté , on considère un carré OABC de centre J tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ *et OA = 6 .*

Soient M et N les deux points définis par : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{OC}$ *.*

1) a) *Caractériser la rotation* **R** *qui transforme A en C et M en N .*

b) *En déduire la nature du triangle BMN .*

2) *Soit K le milieu du segment [MN]*

a) *Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe* **S** *de centre B telle que* **S** *(M) = K .*

b) *Déterminer* **S** *(O) .*

3) *Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(B) = C$ et $\sigma(C) = J$.*

a) *Déterminer le rapport de σ .*

b) *En déduire que σ admet un unique point invariant Ω .*

c) *Caractérise la fonction composée $\sigma \circ \sigma$.*

d) *Préciser alors le centre Ω de σ et construire son axe Δ .*

4) *On pose : $\varphi = S \circ \sigma^{-1}$.*

a) *Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(C)$.*

b) *En déduire la nature et les éléments caractéristiques de φ .*

EXERCICE N : 4 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

A) *Déterminer l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points M , d'affixe Z , du plan tels que $|Z| = 2$.*

B) *Soit $f : P \setminus \{O\} \longrightarrow P$; $M_{(Z)} \longrightarrow M'_{(Z')}$ tel que : $Z' = \frac{1}{2}\left(Z - \frac{1}{Z}\right)$ et A le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{3}}$.*

1) *Soit N le point d'affixe $-\frac{1}{Z}$.*

Montrer que lorsque le point M décrit la demi droite [OA) privé du point O, le point N décrit une demi-droite $\mathcal{D}$ que l'on précisera .

2) *On pose : $Z = re^{i\theta}$ où r est un réel non nul et $\theta \in [0 ; 2\pi]$.*

Montrer que : $Z' = \frac{r^2-1}{2r}\cos\theta + i\,\frac{r^2+1}{2r}\sin\theta$.

3) *Soit M un point de $(\mathscr{C})$ et $M' = f(M)$.*

a) *Montrer que M' est un point de la conique (E) d'équation : $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{25} = \frac{1}{16}$.*

b) *Donner la nature de (E) et préciser son centre , ses sommets , ses foyers et ses directrices .*

4) a) *Montrer que l'image de la demi-droite [OA) privé du point O par la transformation f est une partie d'une conique $(\mathscr{H})$ d'équation : $12X^2 - 4Y^2 + 3 = 0$.*

b) *Montrer que $(\mathscr{H})$ est une hyperbole et donner ses sommets ses foyers et ses asymptotes .*

<u>EXERCICE N : 5</u> ***(6 points)***

Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ *par :* $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$.

*On désigne par **(C f)** la courbe représentative de f dans le repère orthonormé* $R(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

A) 1) *Dresser le tableau de variation de f .*

2) a) *Montrer que la droite* Δ *d'équation :* $y = x$ *est une asymptote à **(Cf)** au voisinage de* $+\infty$.

b) *Déterminer la position de **(C f)** par rapport à* Δ .

3) *Tracer* Δ *et **(C f)** dans le repère R .*

4) a) *Montrer que f est une bijection de* $[0 ; +\infty[$ *sur* $[\ln 2 ; +\infty[$.

b) *Tracer* $(C_{f^{-1}})$ *dans le même repère R .*

B) *On considère la suite* (U_n) *définie sur IN par :* $U_0 = \int_0^{\ln 2} dx$ *et pour tout* $n \in IN^*$; $U_n = \int_0^{\ln 2} [f'(x)]^n dx$.

1) *Déterminer les valeurs exactes de* U_0 *et* U_1 .

2) a) *Montrer que pour tout* $x \in [0 ; \ln 2]$ *on a :* $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{5}$.

b) *En déduire que pour tout* $n \in IN$ *on a :* $0 \leq U_n \leq (\frac{3}{5})^n \ln 2$.

c) *Déterminer alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

3) a) *Vérifier que la fonction f est une solution de l'équation différentielle **(E)** :* $(y')^2 = 1 - y''$.

b) *Montrer alors, que pour tout entier naturel* $n \geq 2$ *on a :* $U_n = U_{n-2} - \frac{1}{n-1}(\frac{3}{5})^{n-1}$.

c) *En déduire que pour tout* $n \in IN^*$ *on a :*

$$U_{2n} = U_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}(\frac{3}{5})^{2k-1} \quad \text{et} \quad U_{2n+1} = U_1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}(\frac{3}{5})^{2k}$$

4) *Pour tout* $n \in IN^*$ *, on pose :* $V_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}(\frac{3}{5})^k$.

Montrer que la suite (V_n) *converge vers un réel que l'on déterminera .*