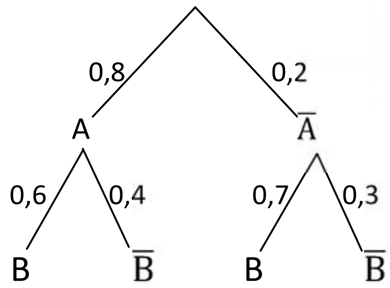
Lycée secondaire Zannouch	**Devoir de synthèse de mathématiques n°3**
Date: 10 mai 2012	**Niveau: 4ème année maths** ☼☼☼☼
Prof: Mr.Smairy.J	**Durée: 4 heures**

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre qui correspond à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-contre.



La probabilité de l'évènement $A \cup B$ est égale à:

a) 0,48 **b)** 0,94 **c)** 0,14

2) La fonction **f** définie par $\mathbf{f}(x) = \ln(x)$ est une densité de probabilité sur l'intervalle :

a) $]0\,;+\infty[$ **b)** $]0\,;1]$ **c)** $[1\,;e]$

3) La durée de vie X, exprimée en années, d'une machine électrique suit une loi exponentielle de paramètre 0,5. La probabilité que la machine ne tombe pas en panne avant 10 ans est égale à :

a) e^{-5} **b)** $1-0{,}5e^{-5}$ **c)** $1-e^{-5}$

4) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit P la parabole d'équation: $y^2 - 4x = 4$.
La tangente à P au point A(8 ,6) a pour équation dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$:

a) $3y - x = 10$ **b)** $2y - 9x = 10$ **c)** $2y - 3x = 10$

Exercice 2 (5 points)

A- On considère l'équation différentielle (E_n): $y' + y = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$ où n est un entier naturel non nul.

1) On considère deux fonctions g et h dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que $g(x) = h(x)e^{-x}$ pour tout réel x.

a- Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout réel x, $h'(x) = \dfrac{x^n}{n!}$

b- En déduire la solution g de (E_n) vérifiant $g(0) = 0$.

2) Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a- Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si, $(\varphi - g)$ est solution de l'équation (E): $y' + y = 0$.

b- Résoudre l'équation (E) puis déterminer la solution f_{n+1} de (E_n) vérifiant $f_{n+1}(0) = 0$.

B- Soit (I_n) la suite réelle définie, sur $\mathbb{N}$, par $I_0 = \int_0^1 e^{-x}\,dx$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) a- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x de $[0\,,1]$, $0 \le f_n(x) \le \dfrac{x^n}{n!}$

b- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le I_n \le \dfrac{1}{(n+1)!}$

2) a- Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $I_k - I_{k-1} = -\dfrac{e^{-1}}{k!}$

b- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{e^{-1}}{k!}$

3) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} = e.$

Exercice 3 (4 points)

Soit A l'ensemble des entiers naturels n vérifiant $1 \leq n \leq 46$.

1) On considère l'équation (E): $23x + 47y = 1$ où x et y sont deux entiers relatifs.

a- Vérifier que (-2 , 1) est une solution de l'équation (E).

b- Résoudre, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E).

c- En déduire qu'il existe un unique élément x de A tel que $23x \equiv 1\ [47]$.

2) Soit a et b sont deux entiers relatifs.

a- Montrer que si $ab \equiv 0[47]$ alors $a \equiv 0[47]$ ou $b \equiv 0\ [47]$.

b- En déduire que si $a^2 \equiv 1[47]$ alors $a \equiv 1[47]$ ou $a \equiv -1\ [47]$.

3) Montrer que, pour tout élément p de A, il existe un entier relatif q tel que $pq \equiv 1[47]$.

4) On admet que, pour tout élément p de A, il existe un unique élément de A, noté $\bar{p}$, tel que $p\bar{p} \equiv 1[47]$.

a- Déterminer les éléments p de A vérifiant $p = \bar{p}$.

b- Montrer que $46! \equiv -1[47]$.

Exercice 4 (4 points)

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie. Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé:

- Si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6.
- Si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ».

A- 1) Montrer que $\mathrm{p(G)} = \frac{7}{30}$ (On pourra s'aider d'un arbre pondéré.)

2) Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

3) Un joueur fait n parties de façon indépendante. (n est un entier naturel supérieur à 2.)

a- Calculer la probabilité p_n qu'il en gagne au moins une.

b- Quel nombre minimal de parties doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit strictement supérieure à 0,99 ?

B- L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent:

- Chaque joueur paie 1 dinar par partie.
- Si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 dinars.
- Si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.

1) Donner la loi de probabilité de X.

2) Prouver que le jeu est défavorable à l'organisateur ?

3) L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n est un entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

Exercice 5 (4 points)

1) Soit g la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = (1 - 2x)e^{2x} + 1$.

a- Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

b- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et vérifier que $0 < \alpha < 1$.

c- En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2) Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \frac{x+(1-x)e^{2x}}{2}$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité graphique 2 cm.)

a- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

b- Montrer que C_f admet une asymptote D que l'on déterminera.

c- Etudier la position de C_f par rapport à D.

d- Tracer C_f et D.

3) Calculer, en cm², l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe C_f, la droite D et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.