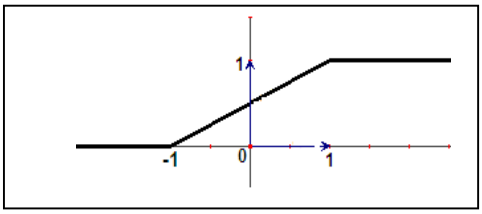
Lycée Thelepte	**Devoir de synthèse n°3**	Section: 4ème Math
Avril 2010	Epreuve : mathématiques	Durée : 4heures

Exercice1 :(3pts)

Donner la réponse correcte.

1) La fonction x → sinx – 2cosx est une solution de l'équation différentielle :
   a) $y'' + 2y = 0$ b) $2y'' + y = 0$ c) $y'' + y = 0$
2) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi continue, dont la courbe de sa fonction de répartition est donnée ci-contre.



   $p\left(X \le \frac{3}{4}\right) =$:
   a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{3}{8}$
3) (x, y) un couple d'entiers tel que : $5x + 8y = 11$, alors:
   a) $x \wedge y = 11$ b) $x \wedge y$ divise 11 c) $x \wedge y$ est un multiple de 11.
4) $\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) =$:
   a) 0 b) $+\infty$ c) 1

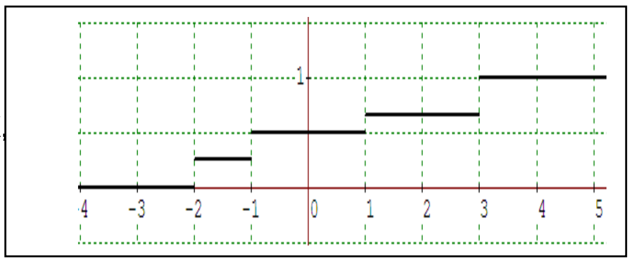
Exercice2 :(5pts)

Les paries (I) et (II) sont indépendants.

(I) La durée de vie (en année) d'un appareil électronique est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}16$.

1) a) Calculer $p(X \ge 8)$.
   b) Calculer la probabilité pour que l'appareil ait une durée de vie inferieur à trois mois.
   c) Déterminer T pour que : $p(X \le T) = p(X \ge T)$.
2) Sachant qu'un appareil à déjà dépassée six ans, qu'elle est la probabilité qu'il fonctionne quatre ans de plus.
3) Une personne achète n appareils électroniques ($n \in \mathbb{N}^*$) du modèle précédent. On suppose que la durée de vie d'un appareil est indépendante de celle des autres.
   a) Exprimer en fonction de n la probabilité p_n qu'au moins un appareil fonctionne plus que huit ans.
   b) Déterminer n pour que $p_n \ge 0{,}998$.

(II) Soit Y la variable aléatoire dont la fonction de répartition F est représentée ci-contre.



1) Déterminer : $p(X \le 1)$, $p(X \le 2)$
   $p(X > 0)$ et $p(1 < X \le 3)$.
2) Déterminer la loi de probabilité de X, E(X) et σ(X).

Exercice4 :(3,5pts)

Dans le tableau suivant on reporte le chiffre d'affaire annuel (en milliers de dinars) d'une librairie (de 1998 à 2005):

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaire y_i	80	83	78	78	78	73	72	70

1) Représenter dans un repère orthonormé le nuage des point M_i (x_i, y_i).
2) déterminer les coordonnées G_1 point moyen des quatre premiers points du nuage et de G_2 point moyen des quatre derniers.
3) Déterminer une équation de la droite (G_1G_2).
4) Déterminer le chiffre d'affaire de la librairie pour l'année 2008.
5) Déterminer en qu'elle année le chiffre d'affaire sera-t-il inferieur à 60.

Exercice3 :(3,5pts)

1) Démontrer qu'il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que : $9u + 11v = 1$.

Vérifier que pour un tel couple, le nombre $n = 8 \times 9u + 6 \times 11v$ est une solution du système (S) : $\begin{cases} n \equiv 6[mod 9] \\ n \equiv 8[mod 11] \end{cases}$.

2) Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaux à $n \equiv n_o[mod 99]$.
3) a) Trouver un couple (u_0, v_0)solution de l'équation : $9u + 11v = 1$.

   b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S).

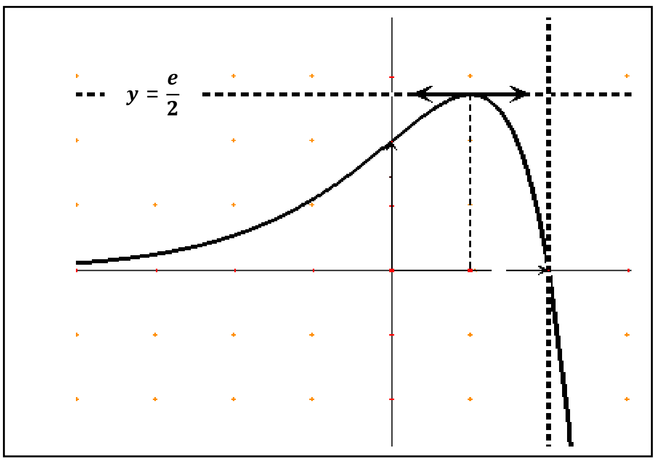
Exercice5 :(6pts)

A) On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = -e^{2x}$.

Soit f une fonction dérivable sur IR telle que $f(1) = 0$ et g la fonction définie sur par : $g(x) = f(x)e^{-2x}$.

1) Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et $f(x)$.
2) Déduire l'expression de $g(x)$ puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit une solution de (E).

B) Dans le graphique ci-contre, (Γ) est la courbe représentative de la fonction f définie sur IR par : $f(x) = (1 - x)\, e^{2x}$.



1) Déterminer à partir du graphe :
   a) Le tableau de variation de f.
   b) Le signe de $f(x)$.
2) Déterminer le tableau de variation de la fonction : $g = f^{2n}$; $(n \in \mathbb{N}^*)$.

3) Calculer l'aire du domaine limité par (Γ) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

4) Justifier que la restriction h de f à l'intervalle $]-\infty, \frac{1}{2}]$ admet une fonction réciproque h^{-1} et préciser le domaine de dérivabilité de h^{-1}.
Construire les courbes de h et de h^{-1} dans un repère orthonormé.

5) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x}\, dx$.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a ; $\frac{1}{n+1} \leq \mathrm{I}_n \leq \frac{e^2}{n+1}$.
   Déduire $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{I}_n$.

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a ; $2\mathrm{I}_{n+1} = (n+1)\mathrm{I}_n - 1$.
   Déduire $\lim_{n \to +\infty} n\mathrm{I}_n$

Bon Travail