LYCÉE: BECHRI

A.S:2010/2011 NIVEAU:4ÈME SECTION: MATHÉMATIQUES PROF: LAHMADI ADEL

BAC BLANC

Exercice N°1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exactes . Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie . Aucune justification n'est demandée. Une réponse correcte vaut 1 point ,une réponse fausse ou l'abscence de réponse vaut 0 point .

❶ Soit f la fonction définie par $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, alors $f'(x)$ est égal à

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ b) $\frac{-\ln 3}{3^x}$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \ln 3$

❷ La valeur moyenne de la fonction $f: x \mapsto x^3 e^{-x^2}$ sur l'intervalle $[-2,2]$ est:

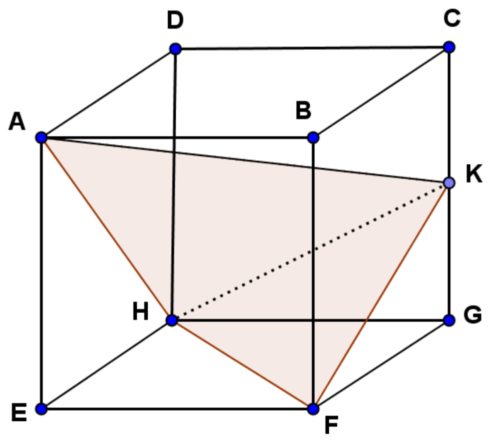
a) $\frac{e^{-4}}{4}$ b) $\frac{e^{-4}}{8}$ c) 0

❸ Soit n un entier naturel. Le complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si

a) $n=3$ b) $n=6k+3$; *avec* $k\in\mathbb{Z}$ c) $n=6k$; $k\in\mathbb{Z}$

Exercice N°2 (4 points)

Dans la figure ci-contre on donne un cube ABCDEFGH et K le milieu de $[CG]$



A/ Soit h l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et qui envoi A sur C.

❶ Déterminer :

a) h(E).

b) Les images des plans (ABC) et (ABE) par h.

❷ Reproduire la figure sur votre copie puis construire le centre O de h.

B/ Maintenant on munit l'espace du repère orthonormé direct $(E,\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EA})$.

❶ Déterminer graphiquement les coordonnées des points : A, F, H et K.

❷ a) Calculer les distances AF et AK.

b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AF}\wedge\overrightarrow{AK}$.

c) En déduire la mesure en radians de l'angle $\widehat{FAK}$.

❸ Calculer le volume du tétraèdre AFKH.

Exercice N°3 (3 points)

❶ On considère l'équation (E) : $23x+47y=1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Donner une solution particulère de (E).

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

c) En déduire qu'il existe un unique **entier** x appartenant à l'intervalle $[1;46]$ tel que $23x\equiv 1[47]$.

❷ Soient a et b deux entiers relatifs.

a) Montrer que si $ab\equiv 0[47]$ alors $a\equiv 0[47]$ ou $b\equiv 0[47]$

b) En déduire que si $a^2\equiv 1[47]$ alors $a\equiv 1[47]$ ou $a\equiv -1[47]$.

❸ Montrer que pour tout **entier** p de l'intervalle $[1;46]$, il existe un unique entier relatif q tel que $pq\equiv 1[47]$

Exercice N°4 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle isocèle ABC tel que AB=AC et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$.

Soit I le point tel que le triangle CAI soit isocèle rectangle avec $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CI}})\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Pour la figure

Que l'on complètera en traitant les questions, on prend AB=5cm.

❶ On appelle R_A la rotation de centre A qui transforme B en C et R_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $f=R_C\, o\, R_A$.

a) Déterminer les images par f de A et de B.

b) Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre O .Placer O sur la figure.

c) Quelle est la nature du quadrilatère ABOC ?

❷ Soit S la similitude directe de centre O qui transforme A en B.On appelle C ' l'image de C par S,

H le milieu du segment $[BC]$ et H ' son image par S.

a) Donner une mesure de l'angle de S.

Montrer que C ' appartient à la droite (OA).

b) Donner l'image par S du segment $[OA]$ et montrer que H ' est le milieu de $[OB]$.

c) Montrer que (C ' H ') est perpendiculaire à (OB).

En déduire que C ' est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

Exercice N°5 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(\frac{x}{x+1})$.

A/

❶ a) Etudier les variations de f.

b) Donner une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

❷ Tracer la courbe C_f de f et sa tangente au point d'abscisse 1.

❸ a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^*+$ sur un intervalle J à préciser.

b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;+\infty[$ et que:

$0.5<\alpha<1$ puis donner un encadrement de α d'amplitude 0.25 .

B/

❶ a) Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement : $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}$

b) Vérifier que : $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \frac{1}{n} - f(n)$

c) En déduire que pour tout entier naturel n non nul , $0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$

❷ On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par: $S_n = \sum_{n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \ldots + f(2n) \leq S_n$

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de (-1) et de 0 , on nait:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

c) En déduire l'égalité: $S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$

d) En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de la somme suivante : $f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n-1) + f(2n)$

Bon Travail