| Lycée O chatti de M'SAKEN<br>Le :13/05/2011 | **Devoir de synthèse n°3** | 4 ° MATHS<br>Durée : 4 heures<br>Mr :Karmous Abdelhamid |
|---|---|---|

**Exercice 1 (3points )**

**Q.C.M**

Pour chacune des questions suivantes, une seule des propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant

a la réponse choisie , sans justification .

**1**)La droite de régression Y en X d'une série statistique double est donnée par : y = - 5x + 20,75 .

i) Le coefficient de corrélation linéaire r(x,y) est égal a :

a) 1,01 b) 0,99 c) – 0, 93

ii) Sachant de plus que Cov(x,y) = - 2,5 alors la variance de X est

a) V(x) = 2 b) V(x) = - 0,5 c) V(x) = 0,5

iii) Si $\bar{X}$ = 2 ; alors on a : $\bar{Y}$ est égale

a) 1 b) 10,75 c) 30,75

**2 )** le chiffre des unités de l'entier $(2009)^{2010}$ est :

a) 1 b) 9 c) 0

**3)** Soit f une similitude indirecte qui a tout point M d'affixe z associe M' d'affixe z' = 2i $\bar{z}$ .

Alors une Equation de son axe est :

a) y = x + 1 b) y = x c) y = 2x – 1

**4**) Le tableau statistique suivant donne l'âge $x_i$ en mois et le poids $y_i$ en kilogramme d'un enfant durant ses premiers mois.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Age $X_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 9 | 15 |
| poids $y_i$ | 6 | 6,8 | 7,5 | 7,8 | 10,6 | 12,4 |

a. Le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique (X, Y) est :

a) $r =$ 0,8675 b) $r =$ 0.9847 c) $r =$ 2,3451

b. L'estimation du poids de cet enfant à l'âge de 18mois est :

$P_1$ : 15,4 $P_2$ :14,3 $P_3$ :20,5 $P_4$ :12,6

**Exercice2 (4points )**

1) a) Etudier suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de $5^n$ par 7 .
   b) Montrer que l'entier $(2000)^{2010} - 1$ est divisible par 7
2) Pour tout entier naturel n on pose : $S_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots \ldots + 5^n$
   a) Montrer que pour tout n de IN on a : $4 S_n = 5^{n+1} - 1$
   b) Montrer que pour tout n de IN ; $S_n$ et $5^n$ sont premiers entre eux .
   c) Soit a un entier ; montrer que : $4S_n \equiv a \pmod 7$ **si et seulement si** $S_n \equiv 2a \pmod 7$
   d) En déduire le reste de la division euclidienne de $S_{2011}$ par 7
   e) Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que $S_n$ soit divisible par 7
3) Soit n un entier naturel non nul donné .On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :
   $(E) : 5^n x + S_n y = 1$
   a) Justifier que ( E ) admet au moins une solution
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation ( E )
4) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le système suivant : $\begin{cases} 25x + 31y = 1 \\ x \equiv y \pmod 5 \end{cases}$

**Exercice3 (6points )**

Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par : $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \sqrt{x+1}$ ; on désigne par$(\mathcal{C})$sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$

1) Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en $-1$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2) Justifier la dérivabilité de $f$ sur $]-1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
3) Dresser le tableau de variation de $f$ puis tracer la courbe $(\mathcal{C})$
4) Soit $\lambda$ un réel supérieur ou égal à $-1$ et $S_\lambda$ le solide, engendré par la rotation, de la partie du plan limitée par la courbe$(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \lambda$ , autour de l'axe des abscisses.
   a- Calculer à l'aide d'une intégration par parties le volume $\mathcal{V}(\lambda)$ de ce solide.
   b- Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{V}(\lambda)$
5) Soit $n \in IN^*$ ; soit la fonction $F_n$ définie sur IR par $F_n(x) = \int_{e^{-x}}^{e} (1 - lnt)^n dt$ et $f_n(x) = (1+x)^n e^{-x}$
   a) Montrer que $F_n$ est dérivable sur IR et déterminer $F_n'(x)$ .
   b) En déduire que pour tout x de IR on a : $F_n(x) = \int_{-1}^{x} (1+t)^n e^{-t} dt$
   c) Montrer a l'aide d'une intégration par parties que pour tout n de $IN^*$ et pour tout x de IR
   $F_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x) - f_{n+1}(x)$
6) On considère la suite $(I_n)$ définie par : $I_n = F_n(0) = \int_1^e (1 - lnt)^n dt$
   a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ ; $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$
   b) Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante et que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$.
   En déduire que $(I_n)$ converge Puis donner sa limite.
7) On pose $U_n = \frac{I_n}{n!}$
   a) Montrer que : $U_{n+1} = U_n - \frac{1}{(n+1)!}$
   b) En déduire que : $\sum\limits_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} = e - U_n$ . Calculer la limite de $\sum\limits_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$

**Exercice4 (4points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère l'ensemble (S) des points $M(x,y,z)$ tels que : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-6=0$.

**1**) Montrer que (S) est une sphère dont on déterminera les coordonnées du centre $I$ et le rayon.

**2**) Soit $A(3,1,2)$, $B(1,3,2)$ et $C(1,-1,-2)$.

a- Montrer que $ABC$ est un triangle rectangle en $A$ et calculer son aire.

b- Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. En déduire qu'une équation cartésienne du plan $(ABC)$ est : $x+y-z-2=0$.

**3**) Montrer que l'intersection de (S) et du plan $(ABC)$ est le cercle circonscrit au triangle $ABC$.

**4**) Soit $h$ l'homothétie de centre $I$ et de rapport −2 et le point $J(2,2,-1)$. On désigne par $A'$, $B'$, $C'$ et $J'$ les images respectives de $A$, $B$, $C$ et $J$ par $h$.

a- Calculer le volume du tétraèdre $ABCJ$ et en déduire, en justifiant, celui du tétraèdre $A'B'C'J'$.

b- Justifier sans calcul que le volume du tétraèdre $A'B'C'J$ est inférieur à celui de $A'B'C'J'$.

c- Calculer maintenant le volume du tétraèdre $A'B'C'J$.

**Exercice 5 (3points )**

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle en A et tel que :$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ On désigne par J le projet orthogonal de A sur (BC).

**1)** Soit S la similitude directe qui envoie A sur B et C sur A.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Montrer que le centre de S est le point J.

c) Déterminer et construire l'image B' du point B par S .

**2)** Soit D le point de la demi droite [AC) tel que AD=AB. On rapporte le plan P au repère orthonormé direct R= $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ .

a) Déterminer les affixes des points B et C selon le repère R.

b) Soit M un point d'affixe z du plan P et M' le point d'affixe z' tel que S( M ) = M' .

Vérifier que $z' = i\sqrt{3}\,z + 1$

c)Retrouver alors le rapport et l'angle de S et déterminer l'affixe du point J .